Fit in Mathe

Musterlösungen 1

April Klassenstufe 11

Thema	**Ableitung**

❶ Bilde den Differenzenquotienten $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ folgender Funktionen an der Stelle x_0 und ermittle den Grenzwert $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

a) $f(x)=x^3$ b) $f(x)=3x^3+2x^2-x+2$

c) $f(x)=\frac{1}{x}\ f\ddot{u}r\ x_0\neq 0$ d) $f(x)=2x^2-2x^{-2}$

Lösung

zu a) $\frac{(x_0+h)^3-x_0^3}{h} = \frac{(x_0^3+3x_0^2h+3x_0h^2+h^3)-x_0^3}{h} = 3x_0^2+3x_0h+h^2$ und

$\lim\limits_{h\to 0} 3x_0^2+3x_0h+h^2 = 3x_0^2$

zu b) $\frac{3(x_0+h)^3+2(x_0+h)^2-(x_0+h)+2-(3x_0^3+2x_0^2-x_0+2)}{h}$

$=\frac{3x_0^3+9x_0^2h+9x_0h^2+3h^3+2x_0^2+4x_0h+2h^2-x_0-h+2-(3x_0^3+2x_0^2-x_0+2)}{h}$

$\frac{=9x_0^2h+9x_0h^2+3h^3+4x_0h+2h^2-h}{h}$

$=9x_0^2+9x_0h+3h^2+4x_0+2h-1$

$\lim\limits_{h\to 0} 9x_0^2+4x_0-1+9x_0h+3h^2+2h = 9x_0^2+4x_0-1$

zu c)

Die Summe der $f'(1)$ *für alle 4 Funktionen ist* ___.

❷ Der Differenzenquotient der Funktion $f(x)=\sqrt{x}$ ist $\frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h}$.

Ermittle die Ableitung der Funktion für ein $x_0>0$.
(Tipp: Erweitere Zähler und Nenner mit $(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})$)

Der Betrag des Grenzwertes an der Stelle $x_0=0{,}25$ *ist* ___ .

❸ Überprüfe, ob die folgenden Funktionen an der bezeichneten Stelle ableitbar sind!

a) $f(x)=\begin{cases}-x^2 & f\ddot{u}r\ x\geq 0\\ x^2 & f\ddot{u}r\ x<0\end{cases}$ an der Stelle $x_0=0$

b) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}\ \text{für}\ x\geq 0\\ -\sqrt{-x}\ \text{für}\ x<0\end{cases}$ an der Stelle $x_0=0$

c) $f(x)=\begin{cases}-x^2-4x+7\ \text{für}\ x\geq 1\\ -x^2+4x-1\ \text{für}\ x<1\end{cases}$ an der Stelle $x_0=1$

d) $f(x)=|x|$ an der Stelle $x_0=0$

Die Summe der Beträge aller existierenden Grenzwerte ist ___ .

❹ Bestimme die Stellen x_0 der Funktion $f(x)=\frac{4}{3}x^3+1$, an denen die Steigung 1 ist.

Die Summe der Beträge der gesuchten x_0 ist ___.

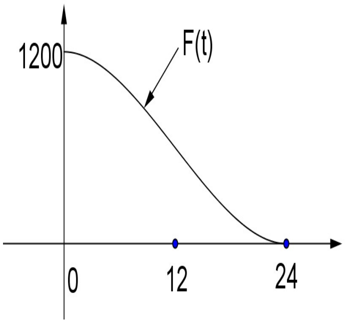
❺ Wie lauten die Koeffizienten der ganzrationalen Funktion 3.Grades $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, die im Punkt $P(2/-4)$ die Ableitung -3 hat und die Achsen in $x=4$ und $y=4$ schneidet.

Die Summe aller Koeffizienten ist ___ .

❻ Wie groß muss b gewählt werden, damit sich die Kurven $y_1=x^2-b$ und $y_2=-x^2+b$ unter rechten Winkeln schneiden.

Der Abstand der Schnittpunkte zueinander ist ___.

❼ Ein Wasserwerk muss einen Speicher für einen Tagesbedarf auslegen. Dieser beträgt 1200 m³. Die Beobachtung zeigt, dass um 0 h keine Entnahmen stattfinden, diese dann aber über den Tag gleichmäßig bis zu einer maximalen Entnahme um 12 h ansteigen und dann bis 24 h wieder allmählich auf Null abnehmen.
Beschreibe den Füllstand des Wasserbehälters mit diesen Angaben durch ein Polynom F(t) möglichst kleinen Grades!
Jetzt soll eine Pumpe während der Entnahme gleichmäßig über 24 Stunden den Tagesbedarf wieder hinzupumpen. Wie ist jetzt der Füllstandsverlauf $F_2(t)$?
Welches maximale Fassungsvermögen benötigt man für den Speicher (auf Zehner aufgerundet)?



Der Nenner des gekürzten Koeffizienten bei t^3 ist ___.

Die Lösungszahlen in willkürlicher Reihenfolge sind:	0	1	1	144	22	0	1

❽ Expertenaufgabe

Der Mittelwertsatz der Differenzialrechnung lautet:

Wenn eine Funktion f in $(a;b)$ differenzierbar ist und in $[a;b]$ stetig, dann existiert mindestens ein c zwischen a und b, so dass

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \quad \text{mit} \quad c\in(a;b) \; .$$

Diesen Satz kann man auch so umschreiben:

Die Steigung, die eine Gerade durch die Punkte des Graphen an den Intervallgrenzen hat, wird innerhalb des Intervalls auch mindestens einmal angenommen.

Beweise unter Zuhilfenahme dieses Satzes die Aussage:

Eine Funktion, deren Ableitung für alle Punkte eines Intervalls 0 ist, muss konstant sein.

Ermittle die Ableitung folgender Funktionen $f(x)=\frac{2x}{x-1}$ und $g(x)=\frac{x+1}{x-1}$.

Was fällt auf? Warum kann man schließen, dass sich beide Funktionen nur um eine Konstante unterscheiden?

Lösung

Beweis des Satzes

Angenommen die Ableitung der Funktion ist in dem Intervall $[a,b]$ konstant 0 , aber es gibt dort trotzdem zwei Stellen x_1 und x_2 mit $x_1<x_2$, für die $f(x_1)\neq f(x_2)$ ist. Dann kann man den Quotienten $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_2-x_1}$ bilden. Dieser ist ungleich 0, weil nach Annahme $f(x_1)\neq f(x_2)$ ist. Nach dem Mittelwertsatz gibt es dann ein $x_0\in[x_{1,}x_2]$, für das $f'(x_0)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\neq 0$ ist. Das steht im Widerspruch zur Voraussetzung, dass die Ableitung überall 0 ist.