Fit in Mathe

April — Klassenstufe 12

Thema	Summenzeichen Σ

❶ $\{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ sei eine Folge von n+1 Zahlen.

Dann wird definiert $\sum_{k=0}^{n} a_k := a_o + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Ist das erste Folgenglied a_m und $m<n$, so ist $\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n$.

Außerdem gilt $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-m} a_{k+m}$, da über dieselben Indizes summiert wird („Summationsindexverschiebung“).

Gib das Folgenglied a_k als Funktion von k an und schreibe die Summe folgender Folgenglieder in der Summenschreibweise :

a) $\{5, 5, 5, \ldots, 5, 5, 5\} (100\, Elemente)$ b) $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 98, 99, 100\}$

c) $\{5, 6, 7, 8, \ldots, 103, 104, 105\}$ d) $\{2, 4, 6, \ldots, 196, 198, 200\}$

e) $\{1, 3, 5, \ldots, 197, 199, 201\}$ f) $\{100, 99, 98, \ldots, 2, 1, 0\}$

Die maximale Anzahl von Summanden $(\neq 0)$ *ist* __.

❷ Für Summen mit n Summanden gelten das verallgemeinerte Kommutativ- (Vertauschungs-) Gesetz und Distributiv- (Verteilungs)-Gesetz, d.h.

$$\sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{n} c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$$

a) Welchen Wert hat die Summe von Aufgabe 1a) ?

b) Die Summe der Aufgabe 1b) sei S. Drücke unter Nutzung obiger Regeln die Summen der Aufgaben 1c) bis f) als Funktion von S aus.

c) Addiere die Summen der Aufgaben 1b) und 1f) und berechne daraus den Wert von S.

d) Wie lautet die allgemeine Formel für die sogenannte „arithmetische“ Reihe

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} k \quad ?$$

Der Wert von S_{100} *ist* ___.

❸ Jemand spart jeweils zum Monatsanfang 100 €, die zum Jahresende zu einem Zinssatz von 6% verzinst werden (Beachte die unterschiedlichen Laufzeiten!)

a) Welche Summe hat sich mitsamt Zinsen zum Jahresende angesammelt?

b) Entwickle eine allgemeine Formel hierfür mit einer Sparrate r, einem Zinssatz von p Prozent und m gleichen Raten (z.B Monatsraten oder Quartalsraten) pro Jahr.

Die Zinsen in 3a) sind __

Fit in Mathe

April Klassenstufe 12

❹ Gib das Folgenglied a_k als Funktion von k an und schreibe die Summe folgender Folgenglieder in der Summenschreibweise

a) $\{1,2,4,8,\ldots,256,512,1024\}$ b) $\{1;1{,}1;1{,}1^2;\ldots;1{,}1^k;\ldots;1{,}1^n\}$

c) $\{\frac{1}{32},\frac{1}{64},\frac{1}{128},\ldots,\frac{1}{4096}\}$ d) $\{1,-3,9,-27,81,\ldots(n\,Elemente)\}$

Die Gesamtzahl aller Summanden (n=10 in b) und d)) ist ___

❺ Beweise $q\cdot\sum_{k=0}^{n} q^k = -1+\sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1}$ und leite daraus eine Formel für

$S_{(n,q)} := \sum_{k=0}^{n} q^k$, die sogenannte „geometrische Reihe“, her.

Der Wert von $S_{(12,2)}$ *ist _____*

❻ Nutze die Formel aus Aufgabe 5 um folgendes Problem zu lösen:
Jemand spart 20 Jahre lang jeweils zum Jahresbeginn einen Wert von 10000 €, für den er während der gesamten Laufzeit jeweils eine jährliche Zinsgutschrift von 5 % bekommt. Bestimme, auf welchen Wert sein Kapital nach Laufzeitende gewachsen ist !

Ganzzahlig gerundet ergeben sich ____Tausend €.

Lösungen mit Kennsilben											
40 FI	100 KO	36 TI	5100 NS	347 EN	101 WO	361 ON	4097 TI	41 TU	5050 HL	8191 ND	39 BE
Lösungswort:											

❼ (Expertenaufgabe)
Auf den norwegischen Mathematiker Niels Henrik Abel geht die folgende Formel zurück:
Es seien $\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ und $\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$ zwei Zahlenfolgen. Außerdem sei eine Zahlenfolge definiert $A_k:=\sum_{i=1}^{k} a_i$, dann bezeichnet man folgende Formel als „partielle Summation“:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\cdot b_k = A_n\cdot b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k\cdot(b_k-b_{k+1})$$

Beweise diese Formel (Hinweis: unter anderem Summationsindexverschiebung).

Finde mit Hilfe dieser Formel eine Formel S(n) für die Summe: $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Hinweis: Nutze die Formel für $\sum_{k=1}^{n} k$ aus Aufgabe 2).

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.