# Fit in Mathe

Juli — Klassenstufe 12

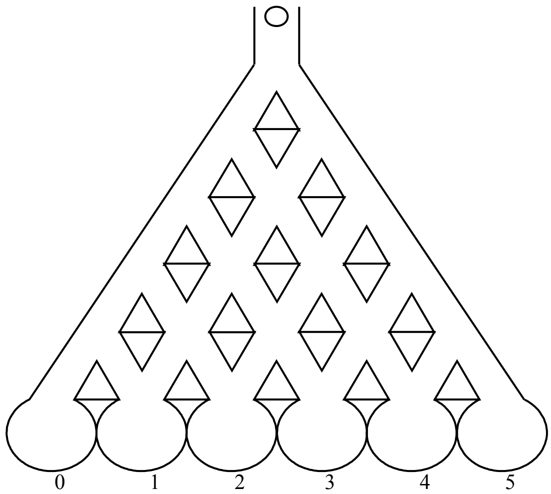
| Thema | **Statistik** |
|---|---|

❶ Die Kugel rollt hinab, geht bei jeder Raute mit der Wahrscheinlichkeit 50% nach rechts und landet in einem der Körbe k=0 bis k= 5.

a) Bestimme die Wahrscheinlichkeiten $P(X=0)$ bis $P(X=5)$ .

b) Berechne für die Zufallsgröße X den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ.

c) Berechne die Wahrscheinlichkeit, mit der k in der σ-Umgebung von μ liegt und vergleiche mit der σ-Regel $P(\mu-\sigma \leq X \leq \mu+\sigma) \approx 0{,}68.$




d) Tom tippt: „Die nächste Kugel landet außerhalb der σ-Umgebung.“ Berechne die Wahrscheinlichkeit, mit der er sich irrt.

e) Für welche n und p ist die Verteilung aus a)

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}=B_{n,p}(k) \text{ ?}$$

*Die rechte Grenze der σ-Umgebung auf eine Stelle gerundet ist* ____.

❷ Für eine Binomialverteilung $B_{n,p}(k)$ gelten folgende <u>σ - Regeln</u>:

Für große n (typisches Kriterium: σ > 3) gilt:

$$P(\mu-\sigma \leq X \leq \mu+\sigma) \approx 0{,}680$$
$$P(\mu-2\sigma \leq X \leq \mu+2\sigma) \approx 0{,}955$$
$$P(\mu-1{,}64\sigma \leq X \leq \mu+1{,}64\sigma) \approx 0{,}9$$
$$P(\mu-1{,}96\sigma \leq X \leq \mu+1{,}96\sigma) \approx 0{,}95$$
$$P(\mu-2{,}58\sigma \leq X \leq \mu+2{,}58\sigma) \approx 0{,}99$$

Diese Regeln gelten auch für die Normalverteilung.

Berechne für $B_{n=100,p=0{,}14}(k)$ die Werte der Zufallsgröße, die innerhalb der

(a) 1,96σ-Umgebung (b) 2,58σ-Umgebung (c) 1,64σ-Umgebung liegen.

*Die Summe aller kleinsten Werte der Zufallsgrößen ist* ____

❸ Für große n (typisches Kriterium: σ > 3) geht die Binomialverteilung wie folgt in die Normalverteilung über:

$$\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}=B_{n,p}(k)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot n\cdot p\cdot(1-p)}}\cdot e^{-\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)}}$$

a) Ersetze in der obigen Normalverteilung n und p äquivalent durch μ und σ.

b) Vier Zufallsgrößen sind normalverteilt mit folgenden μ und σ.

(i) $\mu=2, \sigma=0{,}5$ (ii) $\mu=2, \sigma=0{,}2$ (iii) $\mu=1, \sigma=0{,}2$ (iv) $\mu=4, \sigma=1$

Ordne den Werten in der obiger Reihenfolge die Graphen der unten dargestellten

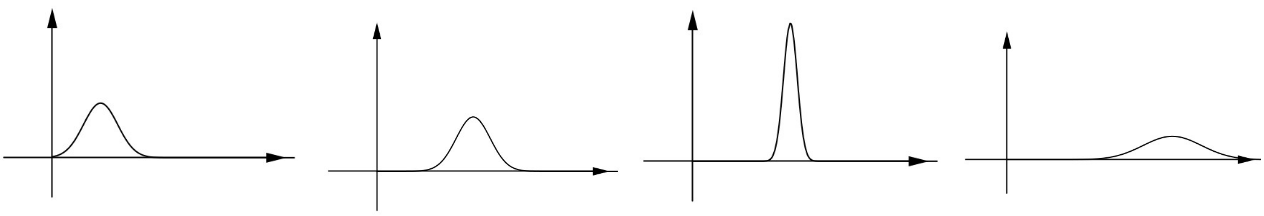
# Fit in Mathe

Juli — Klassenstufe 12

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen zu

*Die Positions-Nrn in passender Reihenfolge sind___.*

1. 2. 3. 4.



❹ Bei einer Kommunalwahl haben 50 % der Wahlberechtigten gewählt. In drei Politikkursen haben 42 von 64 Lernenden gewählt. Kann man mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von

(a) 2,5 % und (b) 0,5 % sagen,

dass dieses Ergebnis nicht zufällig aufgetreten ist, sondern dass die Lernenden überdurchschnittlich häufig wählen? Hinweis: Da es viele Tausend Wahlberechtigte gibt, kann man von einer Binomialverteilung mit $p = 0{,}5$ ausgehen.

*Die Summe der kleinsten Wählerzahlen außerhalb des Zufalls ist ____.*

❺ Bei einer Befragung von 225 Abiturientinnen und Abiturienten im Landkreis Stade gaben 180 an, sie wollten nach dem Abitur gerne studieren.

a) Bestimme alle Anteile p, die mit dem Stichprobenergebnis bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95% verträglich sind.

b) Bestimme den Stichprobenumfang, bei dem der Anteil p der Gesamtheit mit einer Genauigkeit von 1% (Sicherheitswahrscheinlichkeit 95%) geschätzt wird.

*Die ganzzahlig gerundete obere Grenze aus a) plus die Anzahl aus b) ist ___.*

**Lösungen mit Kennsilben**

| 23 | 19 | 3,4 | 80 | 2314 | 7115 | 83 | 25 | 3,6 | 3199 | 6154 | 4,1 | 6232 | 85 | 2143 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| PK | LB | SI | MO | ON | ND | ZE | HN | PO | ER | SH | JO | RT | CA | NY |

Lösungswort:

❻ Expertenaufgabe

Moderne Roboter nutzen Kameras und werten die Bilder autonom aus. Bei manchen Bedingungen erzeugt die Kamera viele stochastische Fehler. Dann kann der Roboter seine Vermutung eines Lichtpunktes beurteilen, indem er den Helligkeitswert des zugehörigen Pixels als Signal S auffasst

| | | |
|---|---|---|
| 10 | 15 | 25 |
| 20 | 40 | 20 |
| 15 | 25 | 30 |

und für die Umgebungspixel den Mittelwert als $\mu$ und die empirische Standardabweichung als $\sigma$ deutet. Der Roboter vermutet, dass der hohe Helligkeitswert in der Mitte nicht zufällig aufgetreten ist.

a) Bestimme das Signal–Rausch–Verhältnis $S/\sigma$.

b) Überprüfe, ob die Irrtumswahrscheinlichkeit unter 0,5 % liegt.