Fit in Mathe

März — Klassenstufe 11

Thema **Grenzwerte**

1 Gegeben sind folgende Zahlenfolgen

a) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$ b) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ c) $1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}, \ldots$

d) $q^0, q^1, q^2, q^3, q^4, \ldots$ mit $q \in R\; und\; |q| < 1$

Gegen welchen Grenzwert bewegen sie sich?

Die Summe der Beträge aller gesuchten Grenzwerte ist ___.

2 Berechne -wenn möglich- die Grenzwerte!

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2+4x^3}{1+x+x^3}$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x^2+4x^3}{1+x+x^3}$ c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2-4|x|x}{2x^2}$ d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2-4|x|x}{2x^2}$

Die Summe der Beträge aller existierender Grenzwerte ist ___ .

3 Berechne – wenn möglich- die Grenzwerte folgender Funktionen

1) $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$ 2) $g(x) = \frac{x^2+2\sqrt{3}x+3}{3-x^2}$ 3) $h(x) = \frac{x^2+x-6}{x+3}$ 4) $k(x) = \frac{3-2x^2}{4x^2}$

a) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to +\sqrt{3}} g(x)$ c) $\lim\limits_{x \to -\sqrt{3}} g(x)$ d) $\lim\limits_{x \to -3} h(x)$ e) $\lim\limits_{x \to 0} k(x)$

Die Summe der Beträge aller existierender Grenzwerte ist ___ .

4 Eine Funktion $f(x)$ ist abschnittsweise folgendermaßen definiert

$$f(x) = \begin{cases} x^2-3 & für\; x \le 1{,}5 \\ \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} & für\; 1{,}5 < x \le 5 \\ \frac{2}{3-x} & für\; x > 5 \end{cases}$$

d.h. der Definitionsbereich sind die reellen Zahlen.

Berechne -wenn möglich- die Grenzwerte a) $\lim\limits_{x \to 1{,}5} f(x)$ und b) $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$

Die Summe der Beträge aller existierender Grenzwerte ist ___.

5 Berechne (durch geschicktes Erweitern oder Kürzen) die Grenzwerte folgender Quotienten.

a) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{(5+h)^2 - 6(5+h) + 5}{h}$ b) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\left(\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}\right)}{h}$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

Die Summe der Beträge aller gesuchten Grenzwerte ist ___ .

Fit in Mathe

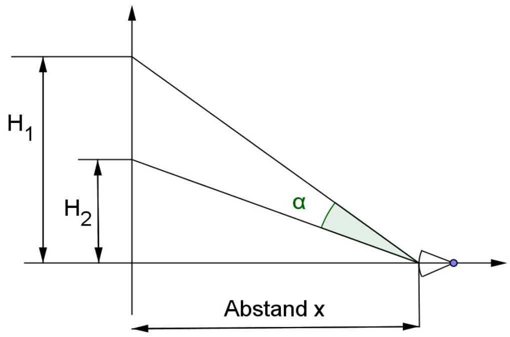
März — Klassenstufe 11

❻ In der Antike versuchte der griechische Philosoph Zenon (um 500 v.Chr.) mit folgendem „Paradoxon“ zu belegen, dass ein Läufer, der 10 m/sec läuft, niemals eine Schildkröte einholen könne, die nur 1 m/sec läuft, der er aber 100 m Vorsprung gegeben hat. Die Begründung war die: Ist der Läufer 100 m gelaufen, ist die Schildkröte schon wieder 10 m weiter und hat er auch die aufgeholt, ist die Schildkröte wieder einen Meter weiter und so fort.
Wo ist der Denkfehler und nach welcher Strecke und welcher Zeit hat der Läufer die Schildkröte tatsächlich eingeholt?

In Dezimalbruchschreibweise kommt bei Weg und Zeit nur die Ziffer ___ vor.

❼ Ein Betrachter sieht ein Standbild, das auf einem Podest der Höhe H_2 steht und das bis zum Scheitel die Höhe H_1 hat unter dem Öffnungswinkel α.
Stelle eine Funktion auf, die den Öffnungswinkel als Funktion des Abstandes darstellt und führe die Grenzwertbetrachtungen durch für $x \to 0$ und $x \to \infty$.

Die Summe der gesuchten Grenzwerte ist ___.



Die Lösungszahlen in willkürlicher Reihenfolge sind:	7	0	8	2	1	4	0,75

❽ <u>Expertenaufgabe (Regel von de l'Hospital)</u>
Wenn man den Grenzwert eines Quotienten zweier differenzierbarer Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ an einer Stelle x_0 ermitteln möchte, an der beide Funktionen den Wert 0 haben, so hat man zunächst Schwierigkeiten mit dessen Bestimmung.
Folgende Umformung kann zielführend ein:

$$\lim_{h \to x_0} \frac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)} = \lim_{h \to x_0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{g(x_0+h)-g(x_0)} = \lim_{h \to x_0} \frac{\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}{\dfrac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Wegen der Differenzierbarkeitsannahme existieren die Grenzwerte der Differenzenquotienten in Zähler und Nenner und wenn $g'(x) \neq 0$ sein sollte, ist der Grenzwert derselbe wie der gesuchte.
Bestimme folgende Grenzwerte:

a) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$ b) $\lim_{x \to 0} \frac{x e^x}{1-e^x}$ c) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ d) $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$