



Fit in Mathe

Musterlösungen

1

April

Klassenstufe 10

Thema

Wurzelfunktionen

- ① Unter der n-ten Wurzel einer nicht-negativen Zahl x (in Zeichen: $\sqrt[n]{x}$) versteht man **die** nicht-negative Zahl, die n mal mit sich selber multipliziert, die Zahl x ergibt.

Dabei schreibt man für $\sqrt[2]{x}$ einfach \sqrt{x} .

Was ist also (ohne Taschenrechner) im Sinne obiger Definition:

- a) $\sqrt{169}$ b) $\sqrt{2,25}$ c) $\sqrt{\frac{9}{25}}$ d) $\sqrt{7056}$ e) $\sqrt{6272,64}$ f) $\sqrt[3]{216}$ g) $\sqrt[3]{0,216}$
h) $\sqrt[5]{0,00001}$

Lösungen

zu a) 13; zu b) 1,5; zu c) $\frac{3}{5}$; zu d) 84; zu e) 79,2; zu f) 6; zu g) 0,6; zu h) 0,1

Die Summe aller Einzelergebnisse ist 185 und davon die Quersumme 14.

- ② Ermittle durch Nutzung obiger Definition der Wurzel die Umkehrfunktion folgender Funktionen und skizziere ihren Graphen:

a) $y = x^2 - 4$ mit dem Definitionsbereich $[0, +\infty)$

b) $y = x^2 - 4$ mit dem Definitionsbereich $(-\infty, 0]$

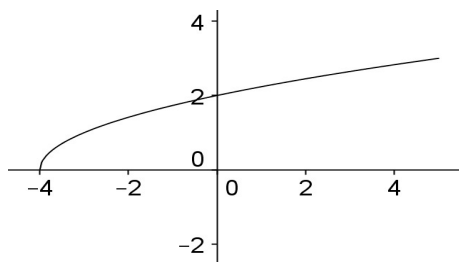
Lösung

Die Umkehrfunktionen sind:

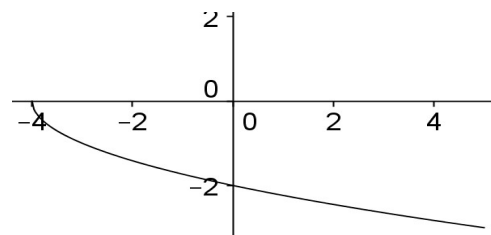
zu a) $y = \sqrt{x+4}$ mit dem Definitionsbereich $[-4, +\infty)$ und

zu b) $y = -\sqrt{x+4}$ mit demselben Definitionsbereich wie bei a).

zu a)



Zu b)



Die Beträge der y-Achsenabschnitte sind in beiden Fällen 2.

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.



Fit in Mathe

Musterlösungen

2

April

Klassenstufe 10

- 3** Bestimme wie in Aufg. 2 eine Unterteilung des Definitionsbereiches der Funktion $y = x^2 - 8x + 16$, für die es jeweils eine Umkehrfunktion gibt und ermittle deren Funktionsgleichung.

Lösung

Wenn man den Definitionsbereich obiger Funktion in die Intervalle a) $(-\infty, 4]$ und b) $[4, +\infty)$ unterteilt, so existieren auf den Intervallen jeweils die Umkehrfunktionen

a) $y = 4 - \sqrt{x}$ mit dem Definitionsbereich $[0, +\infty)$ und

b) $y = 4 + \sqrt{x}$ mit demselben Definitionsbereich.

Der Betrag des y-Achsenabschnitts ist bei beiden Funktionen 4.

- 4** Bestimme eine natürliche Zahl n so, dass der Graph von $f(x) = \sqrt[n]{x}$ durch den Punkt P geht.

a) $P(125/5)$ b) $P(128/2)$ c) $P(10000/10)$

Lösung

zu a) $n=3$; zu b) $n=7$; zu c) $n=4$

Die Summe aller n ist 14.

- 5** Gib den Definitions- und Wertebereich folgender Funktionen an:

a) $f(x) = \sqrt{x-1}$ b) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ c) $f(x) = \sqrt[3]{x^2-4}$ d) $f(x) = \sqrt{x^2-4x+3}$

Lösung

zu a) Definitionsbereich: $[1, +\infty)$ und Wertebereich: $[0, +\infty)$

zu b) Definitionsbereich: $(-\infty, +\infty)$ und Wertebereich: $[1, +\infty)$

zu c) Definitionsbereich: $\mathbb{R} \setminus (-2, 2)$ und Wertebereich: $[0, +\infty)$

zu d) Definitionsbereich: $\mathbb{R} \setminus (1, 3)$ und Wertebereich: $[0, +\infty)$

Die Länge des kürzesten Ausnahmeintervalls der Definitionsbereiche ist 2.

- 6** Was ist der Definitionsbereich folgender Funktionen und wie sehen ihre Graphen aus?

a) $f_1(x) = \sqrt{16-x^2}$ b) $f_2(x) = -\sqrt{16-x^2}$.

Welche geometrische Figur bilden die Graphen?

Lösung

Zu a)

Zu b)

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.



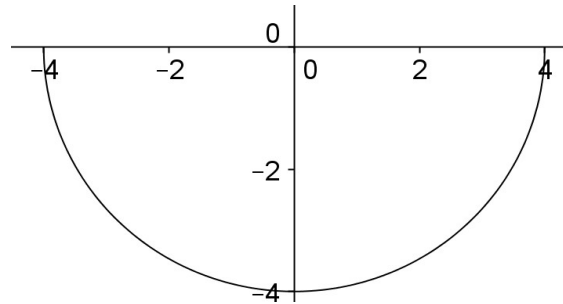
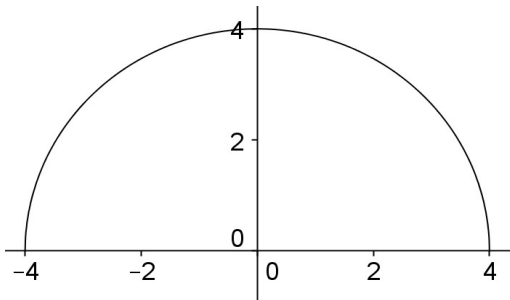
Fit in Mathe

Musterlösungen

3

April

Klassenstufe 10



Beide Graphen zusammen bilden einen Kreis mit Radius 4. Das kleinste Quadrat, das beide Graphen umfasst, hat den Flächeninhalt 64.

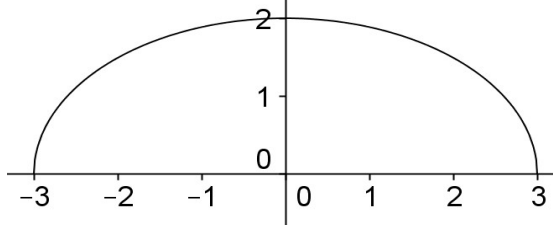
- 7 Was ist der Definitionsbereich der Funktionen

$$f_1(x) = \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2} \quad \text{und} \quad f_2(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2} \quad \text{und wie sehen ihre Graphen aus?}$$

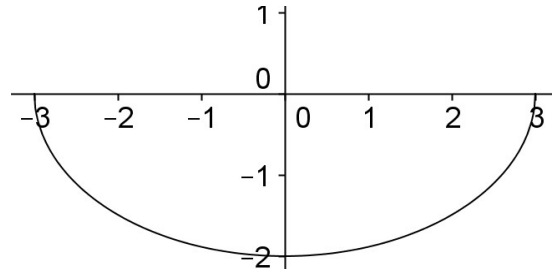
Welche geometrische Figur bilden die Graphen ?

Lösung

Graph von $f_1(x)$:



Graph von $f_2(x)$:



Beide Graphen zusammen bilden eine Ellipse mit den Halbachsen $a=3$ und $b=2$. Die Ellipsengleichung für die gesamte Punktmenge beider Graphen kann auch geschrieben werden als $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$.

Das kleinste die Graphen umfassende Rechteck mit achsenparallelen Seiten hat die Fläche 24.

- 8 Zeige, dass für $x, y > 0$ gilt: $\frac{y-x}{\sqrt{y}+\sqrt{x}} = \sqrt{y}-\sqrt{x}$.

Folgere daraus, dass $y > x$ genau dann gilt, wenn $\sqrt{y} > \sqrt{x}$ ist.

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.



Lösung

Nach der 3. binomischen Formel ($(a-b) \cdot (a+b) = a^2 - b^2$) angewendet auf $a = \sqrt{y}$ und $b = \sqrt{x}$ ergibt sich $(\sqrt{y} - \sqrt{x}) \cdot (\sqrt{y} + \sqrt{x}) = (\sqrt{y})^2 - (\sqrt{x})^2 = y - x$, woraus obige Gleichung folgt. Da $\sqrt{y} + \sqrt{x} > 0$ gilt, müssen $y - x$ und $\sqrt{y} - \sqrt{x}$ immer dasselbe Vorzeichen haben, also ist $y - x > 0$ genau dann wahr, wenn $\sqrt{y} - \sqrt{x} > 0$ wahr ist. Angewendet wurde also die binomische Formel Nr. 3.

9 Für welche x gilt:

a) $\sqrt{2x^2 + 3x + \frac{3}{2}} > \sqrt{x^2 + x + \frac{1}{2}}$ b) $\sqrt{\frac{x-1}{x+2}} > \sqrt{\frac{x+3}{x-2}}$ c) $\sqrt{x^2 + 5x + 10} > \sqrt{2x^2 - x - 6}$

Lösung

zu a)

Beide Terme unter den Wurzelzeichen sind für alle x größer 0. Mit dem Ergebnis von Aufgabe 8 kann man deswegen auch die Frage stellen: Für welche x gilt

$$2x^2 + 3x + \frac{3}{2} > x^2 + x + \frac{1}{2} \quad ? \text{ Dieses ist genau dann der Fall, wenn } x^2 + 2x + 1 > 0 \text{ ist.}$$

Da aber nach der 1. binomischen Formel $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ ist, muss nur $x = -1$ ausgenommen werden, weil hierfür $x^2 + 2x + 1 = 0$ gilt.

Die Lösung von a) ist also: $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Die Länge des Ausnahmeintervalls ist 0, da nur eine Zahl ausgenommen ist.

zu b)

Zunächst müssen die Zahlen 2 und -2 ausgenommen werden, weil hierfür die Nenner der Brüche Null werden.

Dann muss für die Terme unter den Wurzelzeichen gelten:

$$(i) \frac{x-1}{x+2} \geq 0 \quad \text{und} \quad (ii) \frac{x+3}{x-2} \geq 0 .$$

Das erstere heißt, dass entweder $x-1 \geq 0$ und $x+2 > 0$ sind - was nur für $x \geq 1$ der Fall ist- oder $x-1 \leq 0$ und $x+2 < 0$ sind - was nur für $x < -2$ wahr ist. Die Ungleichung (i) erfordert also das Intervall $[-2, 1)$ auszunehmen.

Für die zweite Ungleichung muss entweder $x+3 \geq 0$ und $x-2 > 0$ sein - was nur für $x > 2$ der Fall ist- oder $x+3 \leq 0$ und $x-2 < 0$ sein - was nur für $x \leq -3$ zutrifft. Die Ungleichung (ii) erfordert also das Intervall $(-3, 2]$ auszunehmen.

Da dieses Intervall das zu (i) beinhaltet, kann gesagt werden, dass die obige Ungleichung nur für $x \in \mathbb{R} \setminus (-3, 2]$ Sinn macht, da nur für diese x -Werte die Werte unter den Wurzelzeichen größer Null sind und damit die Wurzeln definiert sind. Wir können damit das Ergebnis von Aufgabe 8 anwenden und müssen untersuchen:

$$\frac{x-1}{x+2} > \frac{x+3}{x-2} .$$

Für die x -Werte aus dem obigen Definitionsbereich ist die Ungleichung äquivalent zu

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.



Fit in Mathe

Musterlösungen

5

April

Klassenstufe 10

$(x-1)(x-2) > (x+3)(x+2)$ oder nach Ausmultiplizieren $x^2 - 3x + 2 > x^2 + 5x + 6$, was zu $-4 > 8x$ äquivalent ist. Das ist aber nur für $x \leq -3$ der Fall.

Die Lösungsmenge der Ungleichung ist mithin das Intervall $(-\infty, -3]$, d.h. die reellen Zahlen mit dem Ausnahmeintervall $(3, +\infty)$.

zu c)

Zunächst muss sicher gestellt werden, dass die Terme unter den Wurzeln nicht negativ sind, d.h. $x^2 + 5x + 10 \geq 0$ und $2x^2 - x - 6 \geq 0$. Der erste Ausdruck hat keine Nullstellen, ist also für alle x größer Null. Der zweite hat die Nullstellen $-1,5$ und 2 , ist also im Intervall $(-1,5; 2)$ negativ. Dies muss infolgedessen ausgenommen werden. Die Ungleichung ist also nur für $\mathbb{R} \setminus (-1,5; 2)$ definiert. Hierfür kann man wieder die Untersuchung auf $x^2 + 5x + 10 > 2x^2 - x - 6$ richten. Diese Ungleichung ist äquivalent zu

$$(*) \quad 0 > x^2 - 6x - 16.$$

Der quadratische Ausdruck hat Nullstellen bei -2 und 8 , d.h. nur in dem Intervall $(-2; 8)$ ist die Ungleichung $(*)$ erfüllt.

Die Lösungsmenge ist also das Intervall $(-2; 8)$, es hat die Länge 10 .

Anders formuliert heißt das: Die Lösung sind die reellen Zahlen mit den Ausnahmeintervallen $(-\infty, 2] \cup [8, +\infty)$

Das kürzeste Ausnahmeintervall ist das aus Aufgabenteil a) mit der Länge 0 .

Die Lösungszahlen in der Reihenfolge der Aufgaben sind:

14

2

4

14

2

64

24

3

0

10 Expertenaufgabe

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ gilt folgende Formel:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

Leite daraus her, dass für alle $x > 0$ gilt:

a) wenn $x > 1$ ist, dann ist $1 < \sqrt[n+1]{x} < \sqrt[n]{x} < x$

b) wenn $0 < x < 1$ ist, dann ist $x < \sqrt[n]{x} < \sqrt[n+1]{x} < 1$

Leite weiterhin her, dass für alle $x > 0$ gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = 1$

Lösung

Aus der oben angegebenen Gleichung kann man ableiten, dass für alle positiven x -Werte $x^n - 1$ und $x - 1$ dasselbe Vorzeichen haben müssen, denn die linke Seite der Gleichung ist für positive x immer positiv. Dasselbe gilt auch, wenn man an Stelle von x in obiger Gleichung $\sqrt[n]{x}$ einsetzt.

Diesen Sachverhalt kann man so formulieren:

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.



Wenn x eine positive Zahl ist, dann sind alle x^n genau dann größer 1, wenn x größer 1 ist.

Für beliebige n folgt also:

Ist $x > 1$ so auch $\sqrt[n]{x} > 1$ bzw. $\sqrt[n+1]{x} > 1$ oder

ist $0 < x < 1$, so auch $\sqrt[n]{x} < 1$ bzw. $\sqrt[n+1]{x} < 1$.

Die obige Gleichung liefert aber noch mehr, nämlich die Ungleichung

$$(*) \quad 1 < \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

denn die linke Seite der Gleichung ist größer als 1, weil zur 1 nur positive Potenzen von x addiert werden.

Das heißt im Fall $x > 1$: $x - 1 < x^n - 1$ oder $x < x^n$ oder $\sqrt[n]{x} < x$. Letzteres folgt, wenn man in der Ungleichung zuvor x durch $\sqrt[n]{x}$ ersetzt.

Im Fall $0 < x < 1$ wird die Ungleichung (*) zu $x - 1 > x^n - 1$ oder $x > x^n$ bzw. wie zuvor $\sqrt[n]{x} > x$ durch Einsetzen von $\sqrt[n]{x}$ für x .

Nun muss man noch zeigen, dass im Fall $x > 1$: $\sqrt[n]{x} > \sqrt[n+1]{x}$ ist.

Aus dem oben Gezeigten wissen wir, dass bei $x > 1$ gilt $\sqrt[n]{x} > 1$, also auch

$$\frac{x \sqrt[n]{x}}{x} > 1. \text{ Im Zähler ersetzen wir } x \text{ durch } (\sqrt[n]{x})^n \text{ und im Nenner durch}$$

$$(\sqrt[n+1]{x})^{n+1}, \text{ dann wird aus der Ungleichung } \frac{(\sqrt[n]{x})^{n+1}}{(\sqrt[n+1]{x})^{n+1}} > 1. \text{ Das kann nach der fett}$$

gedruckten Aussage von oben nur sein, wenn auch $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n+1]{x}} > 1$ ist oder $\sqrt[n]{x} > \sqrt[n+1]{x}$.

Im Fall $0 < x < 1$ können wir so argumentieren: Wir wissen, dass in diesem Fall

$$0 < \sqrt[n]{x} < 1 \text{ ist, also auch } 0 < \frac{x \sqrt[n]{x}}{x} < 1. \text{ Im Zähler ersetzen wir wieder } x \text{ durch}$$

$$(\sqrt[n]{x})^n \text{ und im Nenner durch } (\sqrt[n+1]{x})^{n+1},$$

dann wird aus der Ungleichung $0 < \frac{(\sqrt[n]{x})^{n+1}}{(\sqrt[n+1]{x})^{n+1}} < 1$. Das kann wieder nach Aussage

von oben nur sein, wenn auch $0 < \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n+1]{x}} < 1$ ist oder $0 < \sqrt[n]{x} < \sqrt[n+1]{x}$.

Damit sind alle Ungleichungen bewiesen.

Wie ist es mit dem Grenzwert $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x}$?

Wir sehen, dass im Fall $x > 1$ der Term $\sqrt[n]{x}$ immer kleiner wird, aber stets größer als 1 bleibt. Geht er im Grenzwert gegen 1?

Nehmen wir an, er bliebe stets oberhalb eines gewissen Wertes $(1 + \varepsilon)$, wobei ε ein Wert größer Null sei, d.h. für alle natürlichen Zahlen n gelte $\sqrt[n]{x} > 1 + \varepsilon$ oder

$$\frac{\sqrt[n]{x}}{1 + \varepsilon} > 1. \text{ Das würde nach der fett gedruckten Aussage von oben besagen, dass}$$

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.



Fit in Mathe

Musterlösungen

7

April

Klassenstufe 10

auch für alle n -ten Potenzen $\frac{(\sqrt[n]{x})^n}{(1+\varepsilon)^n} > \frac{x}{(1+\varepsilon)^n} > 1$ oder $x > (1+\varepsilon)^n$ sein würde. Das führt aber zu einem Widerspruch, denn man findet für jedes x und ε ein n , so dass diese Ungleichung nicht mehr gilt. Diese Aussage ließe sich wieder durch Abschätzungen ausgehend von obiger Gleichung beweisen. Wir verzichten hier auf den Beweis.

Analog kann man im Fall $0 < x < 1$ argumentieren. Nehmen wir an, $\sqrt[n]{x}$ bliebe für alle natürlichen n stets unterhalb einem $1-\varepsilon$, wobei das gewählte ε kleiner 1 sein soll. Das hieße für alle natürlichen n : $\frac{\sqrt[n]{x}}{1-\varepsilon} < 1$. Nach der fett gedruckten Aussage

von oben hieße das auch für alle natürlichen n : $\frac{x}{(1-\varepsilon)^n} < 1$: Auch das führt zu einem Widerspruch, denn $(1-\varepsilon)^n$ sinkt unter jedes x , wenn man nur n groß genug wählt. Diese Behauptung ist gleichbedeutend mit der Aussage, dass $\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)^n$ über jedes $\frac{1}{x}$ steigt, wenn man nur n groß genug wählt und entspricht somit der Aussage für den Fall $x > 1$.

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.