Thema **Ableitung**

❶ Bilde den Differenzenquotienten $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ folgender Funktionen an der Stelle x_0 und ermittle den Grenzwert $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

a) $f(x)=x^3$ b) $f(x)=3x^3+2x^2-x+2$

c) $f(x)=\frac{1}{x}$ *für* $x_0\neq 0$ d) $f(x)=2x^2-2x^{-2}$

Lösung

zu a) $\frac{(x_0+h)^3-x_0^3}{h} = \frac{(x_0^3+3x_0^2h+3x_0h^2+h^3)-x_0^3}{h} = 3x_0^2+3x_0h+h^2$,

daher $\lim\limits_{h\to 0} 3x_0^2+3x_0h+h^2 = 3x_0^2$.

Das ergibt für $x_0=1$ *: 3*

zu b) $\frac{3(x_0+h)^3+2(x_0+h)^2-(x_0+h)+2-(3x_0^3+2x_0^2-x_0+2)}{h}$

$=\frac{3x_0^3+9x_0^2h+9x_0h^2+3h^3+2x_0^2+4x_0h+2h^2-x_0-h+2-(3x_0^3+2x_0^2-x_0+2)}{h}$

$\frac{=9x_0^2h+9x_0h^2+3h^3+4x_0h+2h^2-h}{h}$

$=9x_0^2+9x_0h+3h^2+4x_0+2h-1$

daher $\lim\limits_{h\to 0} 9x_0^2+4x_0-1+9x_0h+3h^2+2h = 9x_0^2+4x_0-1$.

Das ergibt für $x_0=1$ *: 12*

zu c) $\frac{\frac{1}{x_0+h}-\frac{1}{x_0}}{h}=\frac{\frac{x_0-(x_0+h)}{x_0(x_0+h)}}{h}=\frac{\frac{-h}{x_0(x_0+h)}}{h}=\frac{(-1)}{x_0(x_0+h)}$

daher $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(-1)}{x_0(x_0+h)} = \frac{(-1)}{x_0^2}$.

Das ergibt für $x_0=1$ *: -1*

zu d)

$$\frac{2(x_0+h)^2-2(x_0+h)^{-2}-2x_0^2+2x_0^{-2}}{h}=\frac{2x_0^2+4x_0h+2h^2-2x_0^2-\frac{2}{(x_0+h)^2}+\frac{2}{x_0^2}}{h}$$

$$=\frac{4x_0h+2h^2-\frac{2x_0^2-2(x_0+h)^2}{(x_0(x_0+h))^2}}{h}$$

$$=\frac{4x_0h+2h^2-\frac{-4x_0h-2h^2}{(x_0(x_0+h))^2}}{h}$$

$$=4x_0+2h-\frac{-4x_0-2h}{(x_0(x_0+h))^2}$$

daher .

$$\lim_{h\to 0} 4x_0+2h-\frac{-4x_0-2h}{(x_0(x_0+h))^2}=4x_0+\frac{4}{x_0^3}$$

Das ergibt für $x_0=1$ *: 8*

Die Summe der $f'(1)$ *für alle 4 Funktionen ist 22.*

---

❷ Der Differenzenquotient der Funktion $f(x)=\sqrt{x}$ ist $\frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h}$.

Ermittle die Ableitung der Funktion für ein $x_0>0$.

(Tipp: Erweitere Zähler und Nenner mit $(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})$)

<u>Lösung</u>

$$\frac{(\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0})}{h}\frac{(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})}{(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})}=\frac{(x_0+h-x_0)}{h(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})}=\frac{1}{(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

Der Betrag des Grenzwertes an der Stelle $x_0=0{,}25$ *ist 1 .*

---

❸ Überprüfe, ob die folgenden Funktionen an der bezeichneten Stelle ableitbar sind!

a) $f(x)=\begin{cases}-x^2 & \text{für } x\geq 0\\ x^2 & \text{für } x<0\end{cases}$ an der Stelle $x_0=0$

b) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & \text{für } x\geq 0\\ -\sqrt{-x} & \text{für } x<0\end{cases}$ an der Stelle $x_0=0$

c) $f(x)=\begin{cases}-x^2-4x+7 & \text{für } x\geq 1\\ -x^2+4x-1 & \text{für } x<1\end{cases}$ an der Stelle $x_0=1$

d) $f(x)=|x|$ an der Stelle $x_0=0$

Lösung

Bei abschnittsweise definierten Funktionen, die aus Einzelfunktionen bestehen, welche auf ihrem jeweiligen Definitionsbereich differenzierbar sind, muss die Differenzierbarkeit an den „Nahtstellen“ überprüft werden. Differenzierbarkeit an diesen Stellen liegt dann vor, wenn der links- und rechtsseitige Grenzwert des Differenzenquotienten existieren und gleich sind.

Es sei h hier für die Grenzwertbetrachtung eine positive Größe, die wir gegen Null laufen lassen.

Zu a)

der linksseitige Grenzwert ist $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(0-h)^2}{-h}=\lim\limits_{h\to 0}(-h)=0$ *und der rechtsseitige* $\lim\limits_{h\to 0}\frac{-(0+h)^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(-h)=0$ *. Beide Grenzwerte existieren und sind gleich Null, also ist die Funktion* $x_0=0$ *differenzierbar mit* $f'(0)=0$ *.*

Zu b)

Der Differenzenquotient für die linksseitige Annäherung ist $\frac{-\sqrt{-(-h)}}{-h}=\frac{1}{\sqrt{h}}$ *und damit* $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{h}}=+\infty$ *. Es gibt also schon bei linksseitiger Annäherung keinen reellen Grenzwert, so dass diese Funktion an der Stelle* $x_0=0$ *nicht differenzierbar ist.*

Zu c)

Der linksseitige Grenzwert ist

$$\lim_{h\to 0}\frac{-(1-h)^2+4(1-h)-1-2}{-h}=\lim_{h\to 0}\frac{-1+2\mathrm{h}-h^2+4-4\mathrm{h}-1-2}{-h}=\lim_{h\to 0}(2+h)=2 \quad ,$$

der rechtsseitige Grenzwert ist

$$\lim_{h\to 0}\frac{-(1+h)^2-4(1+h)+7-2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-1-2\mathrm{h}-h^2-4-4\mathrm{h}+7-2}{h}=\lim_{h\to 0}(-6-h)=-6$$

Die beiden Grenzwerte stimmen nicht überein, also ist die Funktion an der Stelle $x_0=1$ *nicht differenzierbar (obwohl sie dort stetig ist).*

Zu d)

Der linksseitige Grenzwert ist

$$\lim_{h\to 0}\frac{|0-h|-|0|}{-h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{-h}=-1$$ *und der rechtsseitige* $$\lim_{h\to 0}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1 \quad .$$

Beide Grenzwerte sind verschieden, also ist die Funktion an der Stelle $x_0=0$ *nicht differenzierbar.*

Die Summe der Beträge aller existierenden Grenzwerte ist 0 .

❹ Bestimme die Stellen x_0 der Funktion $f(x)=\frac{4}{3}x^3+1$, an denen die Steigung 1 ist.

Lösung
Für die Ableitung an der Stelle x_0 erhält man: $f'(x_0)=4x_0^2$. Setzt man nun die Steigung 1, d.h. $1=4x_0^2$, so erhält man die beiden Lösungen $x_{01}=+\frac{1}{2}$ und $x_{02}=-\frac{1}{2}$ als die gesuchten Stellen. Die Summe der Beträge ist 1.

❺ Wie lauten die Koeffizienten der ganzrationalen Funktion 3.Grades $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, die im Punkt $P(2/-4)$ die Ableitung -3 hat und die Achsen in $x=4$ und $y=4$ schneidet.

Lösung
Auf Grund der Bedingungen ergeben sich folgende Gleichungen für die gesuchten Koeffizienten der Funktion:
(1) $-4=8\text{a}+4\text{b}+2\text{c}+d$, weil der Punkt $P(2/-4)$ auf dem Graphen liegt.
(2) $4=0\text{a}+0\text{b}+0\text{c}+d$, weil die y-Achse bei $y=4$ geschnitten wird.
(3) $0=64\text{a}+16\text{b}+4\text{c}+d$, weil die x-Achse bei $x=4$ geschnitten wird.
Die Ableitung obiger Funktion ist: $f'(x)=3\text{ax}^2+2\text{bx}+c$
(4) $-3=12\text{a}+4\text{b}+c$, weil die Ableitung an der Stelle 2 -3 ist.
Aus (2) folgt sofort $d=4$.
Das führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 8a+4b+2c&=-8 \\ 64a+16b+4c&=-4 \\ 12a+4b+1c&=-3 \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} 4a+2b+1c&=-4 \\ 16a+4b+1c&=-1 \\ 12a+4b+1c&=-3 \end{aligned}$$

Mit dem Gauß-Verfahren für lineare Gleichungssysteme kann man durch die Addition von Vielfachen einer Zeile zu einer anderen folgende Umformungen erhalten:

$$\begin{aligned} 4a+2b+1c&=-4 \\ 16a+4b+1c&=-1 \\ 12a+4b+1c&=-3 \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} 4a+2b+1c&=-4 \\ 0a-4b-3c&=15 \\ 0a-2b-2c&=9 \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} 4a+2b+1c&=-4 \\ 0a-4b-3c&=15 \\ 0a+0b+1c&=-3 \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem ist lösbar und hat die Lösung: $c=-3$, $b=-1{,}5$ und $a=0{,}5$. Also heißt die gesuchte Funktion $f(x)=0{,}5x^3-1{,}5x^2-3\text{x}+4$.
Die Summe aller Koeffizienten ist 0.

❻ Wie groß muss b gewählt werden, damit sich die Kurven $y_1=x^2-b$ und $y_2=-x^2+b$ unter rechten Winkeln schneiden.

Lösung
Im Schnittpunkt der Graphen ist $x^2-b=-x^2+b$. Lösungen dieser Gleichung gibt es nur, wenn b positiv ist und diese sind $x_{1/2}=\pm\sqrt{b}$. Die zugehörigen Punkte sind

$P_1(-\sqrt{b}/0)$ *und* $P_2(\sqrt{b}/0)$ *. Die Ableitungen der beiden Funktionen sind* $y_1'(x)=2x$ *und* $y_2'(x)=-2x$ *und daher die Steigungen im Punkt* P_1 $y_1'(-\sqrt{b})=-2\sqrt{b}$ *und* $y_2'(-\sqrt{b})=2\sqrt{b}$ *bzw. im Punkt* P_2 $y_1'(\sqrt{b})=2\sqrt{b}$ *und* $y_2'(\sqrt{b})=-2\sqrt{b}$ *.*

Eine Gerade steht dann senkrecht auf einer anderen mit der Steigung m, wenn sie die Steigung $-\frac{1}{m}$ *hat.*

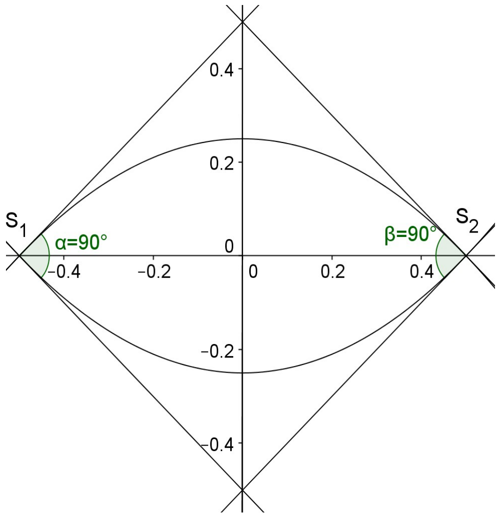
Daraus ergibt sich als Bedingung dafür, dass die Tangenten aufeinander senkrecht stehen:

an der Stelle $-\sqrt{b}$ *:* $-2\sqrt{b}=-\frac{1}{2\sqrt{b}}$ *oder* $4b=1$ *und*

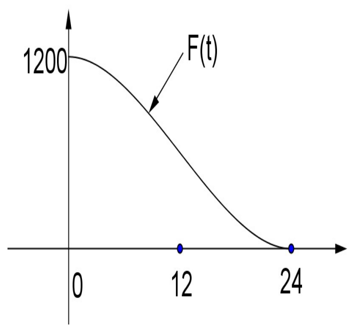
an der Stelle $\sqrt{b}$ *:* $2\sqrt{b}=\frac{1}{2\sqrt{b}}$ *oder ebenfalls* $4b=1$ *.*

Da b positiv sein muss, ist die einzige Lösung der Gleichung: $b=\frac{1}{4}$

Die Schnittpunke haben die Koordinaten $S_1(-0.5/0)$ *und* $S_2=(0.5/0)$ *. Der Abstand zwischen ihnen ist 1.*



❼ Ein Wasserwerk muss einen Speicher für einen Tagesbedarf auslegen. Dieser beträgt 1200 m³. Die Beobachtung zeigt, dass um 0 h keine Entnahmen stattfinden, diese dann aber über den Tag gleichmäßig bis zu einer maximalen Entnahme um 12 h ansteigen und dann bis 24 h wieder allmählich auf Null abnehmen.
Beschreibe den Füllstand des Wasserbehälters mit diesen Angaben durch ein Polynom F(t) möglichst kleinen Grades!
Jetzt soll eine Pumpe während der Entnahme gleichmäßig über 24 Stunden den Tagesbedarf wieder hinzupumpen. Wie ist jetzt der Füllstandsverlauf $F_2(t)$?
Welches maximale Fassungsvermögen benötigt man für den Speicher (auf Zehner aufgerundet)?



Lösung

Angenommen der Speicher sei nur für den Tagesbedarf ausgelegt und es würde nicht hinzugepumpt. Dann können auf Grund obiger Angaben folgende Gleichungen für den Füllstand $F(t)$ aufgestellt werden:

(1) $F(0)=1200$

(2) $F(24)=0$

Die Entnahme soll um 0 Uhr Null sein, d.h. die momentane Änderung des Füllstandes $F'(t)$ ist zu diesem Zeitpunkt 0, d.h. $F'(0)=0$ .Um 12 Uhr soll die Entnahme maximal sein, also hat die Funktion $F(t)$ dort einen Wendepunkt, d.h. notwendigerweise $F''(0)=0$.

Es gibt also 4 Bedingungen, die man in Gleichungen umsetzen kann. Wir können daher ein Polynom 3.Grades $F(t)=at^3+bt^2+ct+d$ mit vier unbekannten Koeffizienten ansetzen. Die erste und zweite Ableitung dieses Polynoms sind $F'(t)=3at^2+2bt+c$ und $F''(t)=6at+2b$.

Es ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$(1)\ \ 1200=a\cdot 0+b\cdot 0+c\cdot 0+d$

$(2)\ \ 0=a\cdot 24^3+b\cdot 24^2+c\cdot 24+d$

$(3)\ \ 0=a\cdot 3\cdot 0+b\cdot 2\cdot 0+c$

$(4)\ \ 0=a\cdot 6\cdot 12+b\cdot 2$

Aus (1) ergibt sich $d=1200$ und aus (3) $c=0$, so dass sich das obige System reduzieren lässt auf

$(1)\ \ -25=a\cdot 288+b\cdot 12$

$(2)\ \ 0=a\cdot 36+b$

mit den Lösungen $a=\frac{25}{144}$ *und* $b=-\frac{900}{144}=-\frac{25}{4}$

d.h. $F(t)=\frac{25}{144}t^3-\frac{25}{4}t^2+1200$

(Wegen $F'''(12)\neq 0$ liegt bei $t=12$ tatsächlich ein Wendepunkt vor.)

Da das Hinzupumpen gleichmäßig über 24 Stunden geschieht und in dieser Zeit $1200\,m^3$ gepumpt werden, ist die entsprechende Füllstandsfunktion:

$$F_p(t)=\frac{1200}{24}t=50t\ .$$

$F_2(t)=F(t)+F_p(t)$ *, die Überlagerung von $F(t)$ und $F_p(t)$, ist:*

$$F_2(t)=\frac{25}{144}t^3-\frac{25}{4}t^2+50t+1200\ .$$

Ein lokales Maximum für $F_2(t)$ liegt vor, wenn $F_2'(t)=0$ und $F_2''(t)<0$ ist.

d.h. $F_2'(t)=\frac{25}{48}t^2-\frac{25}{2}t+50=0$ *oder* $t^2-24t+96=0$ *ist.*

Die quadratische Gleichung hat die Lösungen $t_{1/2}=12\pm\sqrt{12^2-96}=12\pm\sqrt{48}$.

Die zweite Ableitung von $F_2(t)$ ist $F_2''(t)=\frac{25}{2}(\frac{t}{12}-1)$ *und also*

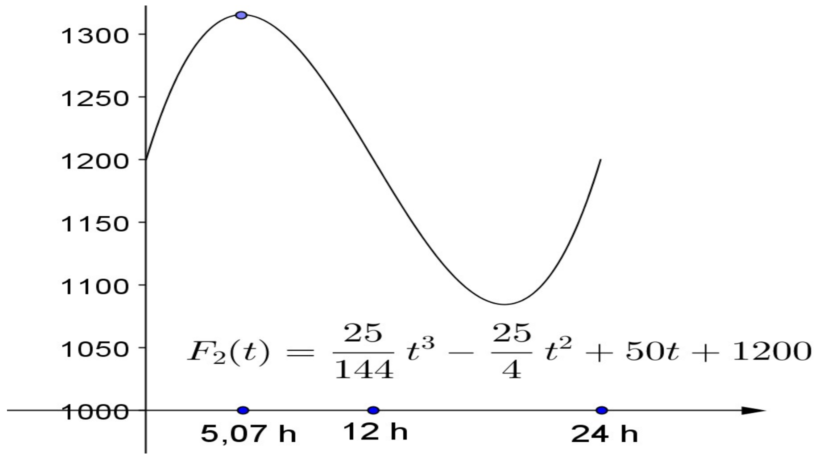
$F_2''(t_2)=\frac{25}{2}(1-\frac{\sqrt{48}}{12}-1)<0$ *und* $F_2''(t_1)=\frac{25}{2}(1+\frac{\sqrt{48}}{12}-1)>0$.

Bei t_2 liegt demnach ein lokales Füllstandsmaximum und bei t_1 ein Minimum.
Der Wert des Maximums ergibt sich durch Einsetzen in die Ursprungsfunktion:

$$F_2(12-\sqrt{48})=\frac{25}{144}(12-\sqrt{48})^3-\frac{25}{4}(12-\sqrt{48})^2+50(12-\sqrt{48})+1200$$

und nach Ausrechnen und auf Zehner Runden erhält man eine notwendige Kapazität von ***1320 m³.***

Der Nenner des gekürzten Koeffizienten bei t^3 ist 144.



Die Lösungszahlen in der Reihenfolge der Aufgaben sind:	22	1	0	1	0	1	144

❽ <u>Expertenaufgabe</u>

Der Mittelwertsatz der Differenzialrechnung lautet:

Wenn eine Funktion f in $(a;b)$ differenzierbar ist und in $[a;b]$ stetig, dann existiert mindestens ein c zwischen a und b, so dass

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \quad \text{mit} \quad c\in(a;b) \quad .$$

Diesen Satz kann man auch so umschreiben:
Die Steigung, die eine Gerade durch die Punkte des Graphen an den Intervallgrenzen hat, wird innerhalb des Intervalls auch mindestens einmal angenommen.

Beweise unter Zuhilfenahme dieses Satzes die Aussage:

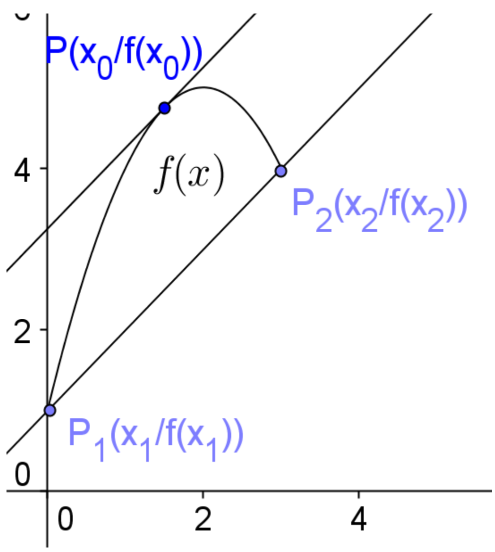
Eine Funktion, deren Ableitung für alle Punkte eines Intervalls 0 ist, muss konstant sein.

Ermittle die Ableitung folgender Funktionen $f(x)=\frac{2x}{x-1}$ und $g(x)=\frac{x+1}{x-1}$.

Was fällt auf? Warum kann man schließen, dass sich beide Funktionen nur um eine Konstante unterscheiden?

<u>*Lösung*</u>

Beweis des Satzes:
Angenommen die Ableitung der Funktion ist in dem Intervall $[a,b]$ *konstant 0, aber es gibt dort trotzdem zwei Stellen* x_1 *und* x_2 *mit* $x_1<x_2$ *, für die* $f(x_1)\neq f(x_2)$ *ist. Dann kann man den Quotienten* $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ *bilden. Dieser ist ungleich 0, weil nach Annahme* $f(x_1)\neq f(x_2)$ *ist. Nach dem Mittelwertsatz gibt es dann ein* $x_0\in[x_{1,}x_2]$ *, für das* $f'(x_0)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\neq 0$ *ist.*
Das steht im Widerspruch zur Voraussetzung, dass die Ableitung überall 0 ist.



Zu den beiden Funktionen:
Nach Quotientenregel ist

$$f'(x)=\frac{2(x-1)-2x}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2} \quad \text{und} \quad g'(x) = \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2} \ .$$

Da beide Ableitungen gleich sind, muss $f(x)-g(x)$ *eine Konstante sein, d.h. die beiden Funktionen -obwohl man es auf den ersten Blick nicht sieht-, können sich nur um eine Konstante unterscheiden. In der Tat ist* $\frac{2x}{x-1}-\frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} = 1$