Fit in Mathe

Musterlösungen 1

April Klassenstufe 12

Thema **Summenzeichen Σ**

❶ $\{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ sei eine Folge von n+1 Zahlen.

Dann wird definiert $\sum_{k=0}^{n} a_k := a_o + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Ist das erste Folgenglied a_m und $m<n$, so ist $\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n$.

Außerdem gilt $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-m} a_{k+m}$, da über dieselben Indizes summiert wird („Summationsindexverschiebung“).

Gib das Folgenglied a_k als Funktion von k an und schreibe die Summe folgender Folgenglieder in der Summenschreibweise :

a) $\{5, 5, 5, \ldots, 5, 5, 5\} (100\ Elemente)$
b) $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 98, 99, 100\}$
c) $\{5, 6, 7, 8, \ldots, 103, 104, 105\}$
d) $\{2, 4, 6, \ldots, 196, 198, 200\}$
e) $\{1, 3, 5, \ldots, 197, 199, 201\}$
f) $\{100, 99, 98, \ldots, 2, 1, 0\}$

Lösung

zu a) $\sum_{k=1}^{100} 5$ zu b) $\sum_{k=0}^{100} k$ zu c) $\sum_{k=0}^{100} (k+5)$ oder $\sum_{k=5}^{105} k$

zu d) $\sum_{k=0}^{100} (2 \cdot k)$ oder $\sum_{k=1}^{100} (2 \cdot k)$ zu e) $\sum_{k=0}^{100} (2 \cdot k + 1)$ zu f) $\sum_{k=0}^{100} (100 - k)$

Die maximale Anzahl von Summanden $(\neq 0)$ *ist 101, also Buchstabenpaar WO*

❷ Für Summen mit n Summanden gelten das verallgemeinerte Kommutativ- (Vertauschungs-) Gesetz und das Distributiv- (Verteilungs)-Gesetz, d.h.

$$\sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{n} c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$$

a) Welchen Wert hat die Summe von Aufgabe 1 a) ?

b) Die Summe der Aufgabe 1 b) sei S. Drücke unter Nutzung obiger Regeln die Summen der Aufgaben 1c) bis f) als Funktion von S aus.

c) Addiere die Summen der Aufgaben 1 b) und 1 f) und berechne daraus den Wert von S.

d) Wie lautet die allgemeine Formel für die sogenannte „arithmetische“ Reihe

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} k \ ?$$

Lösung

zu a) $\sum_{k=1}^{100} 5 = 100 \cdot 5 = 500$

zu b) $S := \sum_{k=0}^{100} k$, dann ist

1c) $\sum_{k=0}^{100} (k+5) = \sum_{k=0}^{100} k + \sum_{k=0}^{100} 5 = S+505$

1d) $\sum_{k=0}^{100} (2 \cdot k) = 2 \sum_{k=0}^{100} k = 2 \cdot S$

1e) $\sum_{k=0}^{100} (2 \cdot k+1) = 2 \cdot \sum_{k=0}^{100} k + \sum_{k=0}^{100} 1 = 2 \cdot S+101$

1f) $\sum_{k=0}^{100} (100-k) = \sum_{k=100}^{0} k = \sum_{k=0}^{100} k = S$

zu c)
$$2S = \sum_{k=0}^{100} k + \sum_{k=0}^{100} (100-k) = \sum_{k=0}^{100} (k+100-k) = \sum_{k=0}^{100} 100 = 101 \cdot 100 \Rightarrow$$
$$S = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$$

zu d) Ersetze den Summationsindex 100 durch n, dann ist:
$$2S_n = \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} (n-k) = \sum_{k=0}^{n} (k+n-k) = \sum_{k=0}^{n} n = (n+1) \cdot n \Rightarrow$$
$$S_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Der Wert von S_{100} ist 5050, also Buchstabenpaar HL

❸ Jemand spart jeweils zum Monatsanfang 100 €, die zum Jahresende zu einem Zinssatz von 6% verzinst werden (Beachte die unterschiedlichen Laufzeiten!)

a) Welche Summe hat sich mitsamt Zinsen zum Jahresende angesammelt?

b) Entwickle eine allgemeine Formel hierfür mit einer Sparrate r, einem Zinssatz von p Prozent und m gleichen Raten (z.B Monatsraten oder Quartalsraten) pro Jahr.

Lösung

zu a)

Die im k-ten Monat eingezahlte Sparrate wird bis zum Jahresende über eine Zeitdauer von 13 – k Monaten verzinst, d.h. die Zinsen Z_k betragen:
$$Z_k = 100 \cdot \frac{(13-k)}{12} \cdot \frac{6}{100} .$$
also liefert die k-te Rate den Beitrag zur Gesamtsumme am Jahresende
$$r_k = 100 \cdot (1+\frac{(13-k)}{12} \cdot \frac{6}{100}) .$$

Die Gesamtsumme S über alle Sparraten ist:

$$S := \sum_{k=1}^{12} r_k = \sum_{k=1}^{12} 100\cdot\left(1+\frac{(13-k)}{12}\cdot\frac{6}{100}\right) = 100\cdot 12+\frac{100\cdot 6}{12\cdot 100}\cdot\sum_{k=1}^{12}(13-k)$$

Wegen $\sum_{k=1}^{12}(13-k) = \sum_{k=1}^{12} k = \frac{12\cdot 13}{2} = 78$ (siehe Aufgabe 2) kann man dafür schreiben:

$$S = 1200+\frac{6}{12}\cdot 78 = 1239€$$

zu b)
Wir führen den Rechengang von a) mit den allgemeinen Variablen durch und erhalten:

$$Z_k = r\cdot\frac{(m+1-k)}{m}\cdot\frac{p}{100} \quad \text{bzw.} \quad r_k = r\cdot\left(1+\frac{(m+1-k)}{m}\cdot\frac{p}{100}\right) \quad \text{mit} \quad 1\le k\le m \ .$$

Die Gesamtsumme ist analog:

$$S := \sum_{k=1}^{m} r_k = \sum_{k=1}^{m} r\cdot\left(1+\frac{(m+1-k)}{m}\cdot\frac{p}{100}\right) = r\cdot\left(\sum_{k=1}^{m} 1+\frac{p}{100\cdot m}\cdot\sum_{k=1}^{m}(m+1-k)\right)$$

$$\Leftrightarrow S = r\cdot\left(m+\frac{p}{100\cdot m}\cdot\sum_{k=1}^{m} k\right) = r\cdot\left(m+\frac{m+1}{2}\cdot\frac{p}{100}\right)$$

Die Zinsen im Teil a) sind 39 €, also Buchstabenpaar BE

4 Gib das Folgenglied a_k als Funktion von k an und schreibe die Summe folgender Folgenglieder in der Summenschreibweise

a) $\{1,2,4,8,\ldots,256,512,1024\}$ b) $\{1;1{,}1;1{,}1^2;\ldots;1{,}1^k;\ldots;1{,}1^n\}$

c) $\{\frac{1}{32},\frac{1}{64},\frac{1}{128},\ldots,\frac{1}{4096}\}$ d) $\{1,-3,9,-27,81,\ldots(n\,Elemente)\}$

<u>*Lösung*</u>

zu a) $\sum_{k=0}^{10} 2^k$ zu b) $\sum_{k=0}^{n} 1{,}1^k$ zu c) $\sum_{k=5}^{12} 2^{-k}$ oder $\sum_{k=0}^{7} 2^{-k-5}$ zu d) $\sum_{k=0}^{n-1}(-3)^k$

Die Gesamtzahl aller Summanden (n=10 in b) und d)) ist 11+11+8+10=40, also Buchstabenpaar FI.

5 Beweise $q\cdot\sum_{k=0}^{n} q^k = -1+\sum_{k=0}^{n} q^k+q^{n+1}$ und leite daraus eine Formel für

$S_{(n,q)} := \sum_{k=0}^{n} q^k$, die sogenannte „geometrische Reihe“, her.

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.

Lösung

$$q\cdot\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} q^{k+1} + q^{n+1} = \sum_{k=1}^{n} q^k + q^{n+1} = -1 + q^0 + \sum_{k=1}^{n} q^k + q^{n+1}$$

$$= -1 + \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1}$$

Mit $S_{(n,q)} := \sum_{k=0}^{n} q^k$ ist die Ausgangsgleichung dieser Aufgabe:

$$q\cdot S_{(n,q)} = -1 + S_{(n,q)} + q^{n+1} \Leftrightarrow S_{(n,q)} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

Nach dieser Formel ist $S_{(12,2)} = \frac{2^{13}-1}{2-1} = 8191$ *, also Buchstabenpaar ND.*

❻ Nutze die Formel aus Aufgabe 5, um folgendes Problem zu lösen:
Jemand spart 20 Jahre lang jeweils zum Jahresbeginn einen Wert von 10000 €, für den er während der gesamten Laufzeit jeweils eine jährliche Zinsgutschrift von 5 % bekommt. Bestimme, auf welchen Wert sein Kapital nach Laufzeitende gewachsen ist.

Lösung

Die im k-ten Jahr gesparte Rate wird 21– k Jahre verzinst und liefert dann mitsamt Zinsen einen Beitrag von $r_k = 10000\cdot 1{,}05^{21-k}$ zur Gesamtsumme.
Alle diese Jahresbeiträge aufaddiert ergeben:

$$S_{20} := \sum_{k=1}^{20} r_k = 10000\cdot\sum_{k=1}^{20} 1{,}05^{21-k} = 10000\cdot\sum_{k=1}^{20} 1{,}05^k = 10000\cdot 1{,}05\cdot\sum_{k=0}^{19} 1{,}05^k$$

und wenn man nun die Formel aus Aufgabe 5 nutzt, d.h.

$$\sum_{k=1}^{19} 1{,}05^k = \frac{1{,}05^{20}-1}{1{,}05-1}$$

so ergibt sich:

$$S_{20} := 10000\cdot 1{,}05\cdot\frac{1{,}05^{20}-1}{0{,}05} = 347192{,}52€$$

Ganzzahlig gerundet ergeben sich 347 Tausend €, also Buchstabenpaar EN.

Lösungen mit Kennsilben											
40 FI	100 KO	36 TI	5100 NS	347 EN	101 WO	361 ON	4097 TI	41 TU	5050 HL	8191 ND	39 BE
Lösungswort: WOHLBEFINDEN											

❼ (Expertenaufgabe)
Auf den norwegischen Mathematiker Niels Henrik Abel geht die folgende Formel zurück:
Es seien $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ und $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ zwei Zahlenfolgen. Außerdem sei eine Zahlenfolge definiert $A_k := \sum_{i=1}^{k} a_i$, dann bezeichnet man folgende Formel als „partielle Summation":

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k = A_n \cdot b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k \cdot (b_k - b_{k+1})$$

Beweise diese Formel (Hinweis: unter anderem Summationsindexverschiebung).

Finde mit Hilfe dieser Formel eine Formel S(n) für die Summe: $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Hinweis: Nutze die Formel für $\sum_{k=1}^{n} k$ aus Aufgabe 2).

Lösung
Zum Beweis der partiellen Summation:

$$\begin{aligned} A_n \cdot b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k \cdot (b_k - b_{k+1}) &= A_n \cdot b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k \cdot b_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_k \cdot b_{k+1} \\ &= A_n \cdot b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k \cdot b_k - \sum_{k=2}^{n} A_{k-1} \cdot b_k \\ &= A_n \cdot b_n + A_1 \cdot b_1 + \sum_{k=2}^{n-1} A_k \cdot b_k - \sum_{k=2}^{n-1} A_{k-1} \cdot b_k - A_{n-1} \cdot b_n \\ &= A_n \cdot b_n + A_1 \cdot b_1 + \sum_{k=2}^{n-1} (A_k - A_{k-1}) \cdot b_k - A_{n-1} \cdot b_n \\ &= A_1 \cdot b_1 + \sum_{k=2}^{n-1} (A_k - A_{k-1}) \cdot b_k + (A_n - A_{n-1}) \cdot b_n \end{aligned}$$

Nun ist aber nach der Definition: $A_1 = a_1$ und $A_k - A_{k-1} = a_k$ und damit wird:

$$A_1 \cdot b_1 + \sum_{k=2}^{n-1} (A_k - A_{k-1}) \cdot b_k + (A_n - A_{n-1}) \cdot b_n = a_1 \cdot b_1 + \sum_{k=2}^{n-1} a_k \cdot b_k + a_n \cdot b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k \quad .$$

Mit Hilfe der partiellen Summation lässt sich eine Formel für $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$ finden.

Setze $a_k := k$ und $b_k = k$ und bedenke, dass dann (siehe oben)

$A_k = \sum_{i=1}^{k} i = \dfrac{k \cdot (k+1)}{2}$ ist.

Damit kann man unter Nutzung der partiellen Summation folgende Gleichung aufstellen:

$$S_n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}\cdot n + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k\cdot(k+1)}{2}\cdot(k-k-1)$$

$$= \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(k^2+k)$$

$$= \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(k^2+k) - \frac{1}{2}(n^2+n) + \frac{1}{2}(n^2+n)$$

$$= \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^2+k) + \frac{1}{2}(n^2+n)$$

$$= \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{1}{2}S_n - \frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{2}(n^2+n)$$

und aus dieser Gleichung ergibt sich für S_n :

$$\frac{3}{2}\cdot S_n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}\cdot(n-\frac{1}{2}+1) \Leftrightarrow$$

$$S_n = \frac{n(n+1)}{3}\cdot(n+\frac{1}{2}) = \frac{1}{6}\cdot(n\cdot(n+1)\cdot(2n+1))$$