



Fit in Mathe

Musterlösung

1

August

Klassenstufe 10

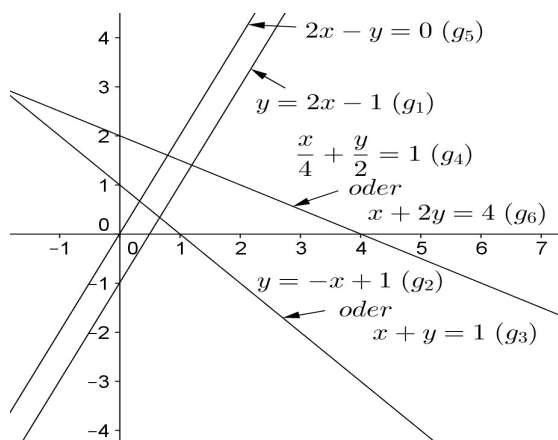
Thema

Lineare Gleichungssysteme

- ① Zeichne die Geraden g_i ($i=1,\dots,6$) in ein kartesisches Koordinatensystem, deren Koordinaten folgende Bedingungen erfüllen:

1) $y = 2x - 1$ 2) $y = -x + 1$ 3) $x + y = 1$ 4) $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$ 5) $2x - y = 0$
6) $x + 2y = 4$

Lösung



Die Anzahl unterschiedlicher Graphen ist 4, also Buchstabenpaar GE.

- ② Untersuche die Lagebeziehung der folgenden Geradenpaare aus der Aufgabe 1 und bestimme die Schnittpunkte

a) g_2 und g_3 b) g_1 und g_2 c) g_1 und g_5 d) g_4 und g_5 e) g_4 und g_6

Lösung

zu a) identisch zu b) 1 Schnittpunkt zu c) elementfremd *)
zu d) 1 Schnittpunkt zu e) identisch

*) Zwei Mengen heißen elementfremd oder disjunkt, wenn sie keine gemeinsamen Elemente haben.

Von diesen Geradenpaaren haben 2 genau einen Schnittpunkt, also Buchstabenpaar WI.

- ③ Bestimme mit dem für die Aufgabe am besten geeigneten Verfahren (Gleichsetzungsverfahren, Einsetzungsverfahren, Additionsverfahren) die Lösung folgender linearer Gleichungssysteme mit den beiden Unbekannten x und y .

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.



Fit in Mathe

Musterlösung

2

August

Klassenstufe 10

a) $4y = 3x - 4$ b) $13x - 9y = -41$ c) $2x + 3y = 9$ d) $2x - 6y = -6$
 $4y = 5x - 20$ $x - 5y = -1$ $\frac{1}{3}x - \frac{1}{5}y = 12$ $-3x + 9y = 12$

Lösung

zu a) mit Gleichsetzungsverfahren:

$$3x - 4 = 5x - 20 \Rightarrow 16 = 2x \Rightarrow x = 8 \Rightarrow y = 5$$

zu b) mit Einsetzungsverfahren:

$$x = 5y - 1 \Rightarrow 13(5y - 1) - 9y = -41 \Rightarrow 65y - 13 - 9y = -41$$

$$56y = -28 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{7}{2}$$

zu c) erst Multiplikation der 2. Gleichung mit 15, dann Additionsverfahren

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 9 \\ 5x - 3y &= 180 \end{aligned} \Rightarrow 7x = 189 \Rightarrow x = 27 \Rightarrow 54 + 3y = 9 \Rightarrow y = -15$$

zu d) erst Multiplikation der ersten Gleichung mit 3 und der zweiten mit 2, dann Additionsverfahren

$$\begin{aligned} 6x - 18y &= -18 \\ -6x + 18y &= 24 \end{aligned} \Rightarrow 0 = 6$$

Das ist für alle x und y falsch, also ist dieses Gleichungssystem nicht lösbar

Der größte x -Wert aller Aufgaben ist 27 in Teil c), also Buchstabenpaar CH .

4 Die folgenden Linearen Gleichungssysteme haben die sogenannte „obere Dreiecks“-Form. Wie kann man diese am besten lösen ?

a) $2x - y = 10$ b) $3x - 5y = 9$ c) $2x + 3y - 4z = 22$ d) $3x + 6y - 2z = -4$
 $y = 2$ $-2y = 6$ $2y + z = 4$ $4y - 3z = -4$
 $z = -2$ $5z = 10$

Lösung

Für die Lösung bietet sich an, die Unbekannte beginnend bei der untersten Gleichung zu ermitteln, mit diesem Ergebnis in die Vorgängergleichung zu gehen und darin wieder die nächste Unbekannte zu bestimmen.

zu a) $y = 2 \Rightarrow 2x - 2 = 10 \Rightarrow x = 6$

zu b) $y = -3 \Rightarrow 3x - 5 \cdot (-3) = 9 \Rightarrow 3x = -6 \Rightarrow x = -2$

zu c) $z = -2 \Rightarrow 2y - 2 = 4 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow 2x + 9 + 8 = 22 \Rightarrow x = 2,5$

zu d) $z = 2 \Rightarrow 4y - 6 = -4 \Rightarrow y = 0,5 \Rightarrow 3x + 3 - 4 = -4 \Rightarrow x = -1$

Der größte x -Wert aller Aufgaben ist 6 in Teil a), also Buchstabenpaar TH .

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.



Fit in Mathe

Musterlösung

3

August

Klassenstufe 10

- 5 Gegeben ist das Gleichungssystem
$$\begin{array}{l} 2x + 3y = 14 \\ -10x - y = 0 \end{array}$$

a) Bestimme die Lösung.

Wenn ein Paar (x, y) die erste Gleichung erfüllt, dann ist die zweite Gleichung auch dann wahr, wenn man beidseitig ein n -faches der ersten dazu addiert, d.h. für dasselbe (x, y) muss dann auch gelten:

$$(-10x - y) + n \cdot (2x + 3y) = 0 + n \cdot 14$$

b) Stelle diese Gleichung um in eine Form: $a \cdot x + b \cdot y = c$.

c) Für welches n ist der Koeffizient a bei x gleich 0?

d) Stelle für dieses n die neue Gleichung auf.

e) Erläutere die Lagebeziehung der neuen Geraden zum Schnittpunkt (siehe a))

Lösung

zu a) $y = -10x \Rightarrow 2x + 3(-10x) = 14 \Rightarrow 2x - 30x = 14 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = 5$

zu b) $(-10 + 2n) \cdot x + (-1 + 3n) \cdot y = 14n$

zu c) Für $n = 5$ ergibt sich $0 \cdot x + 14y = 70$.

zu d) Die neue Gleichung ist $14y = 70 \Leftrightarrow y = 5$.

zu e) Die neue Gleichung ist eine Parallele zur x -Achse, die ebenfalls durch den Schnittpunkt der beiden Geraden $(-\frac{1}{2} / 5)$ des Ausgangssystems geht.

Das gesuchte n ist 5, also Buchstabenpaar EB.

- 6 Ein Schwimmbecken kann durch zwei Pumpen gefüllt werden. Wenn beide Pumpen gemeinsam 6 Stunden lang arbeiten und anschließend Pumpe 2 ausgeschaltet wird, muss Pumpe 1 noch 2 Stunden geöffnet bleiben, um das Becken vollständig zu füllen. Wird nach den sechs Stunden aber Pumpe 1 ausgeschaltet, muss die zweite Pumpe drei weitere Stunden bis zur vollständigen Füllung arbeiten. In welcher Zeit kann das Becken durch jede der beiden Pumpen allein gefüllt werden?

Lösung

Es sei x die Zeit, die die 1. Pumpe allein bräuchte und y die Zeit, die die zweite allein benötigen würde. Außerdem sei B die Füllmenge des Beckens.

Dann ist $\frac{B}{x}$ die Pumpleistung der ersten und $\frac{B}{y}$ die Pumpleistung der zweiten Pumpe.

Für die Füllung des gesamten Beckens wird benötigt $6\left(\frac{B}{x} + \frac{B}{y}\right) + 2 \cdot \frac{B}{x} = B$ oder nach Dividieren durch B :

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.



Fit in Mathe

Musterlösung

4

August

Klassenstufe 10

$$(1) \quad 6\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + 2 \cdot \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow 3\frac{2}{x} + 2\frac{3}{y} + \frac{2}{x} = 1 \quad .$$

Da die nach 6 Stunden verbleibende Restmenge von der ersten Pumpe in 2 und der zweiten in 3 Stunden gefördert wird, muss gelten $2\frac{B}{x} = 3\frac{B}{y}$ bzw.

$$(2) \quad \frac{2}{x} = \frac{3}{y} \quad .$$

Setzt man wegen Gleichung (2) in Gleichung (1) für $\frac{2}{x}$ den Ausdruck $\frac{3}{y}$ ein, ergibt

$$\text{sich: } 3\frac{3}{y} + 2\frac{3}{y} + \frac{3}{y} = 1 \Leftrightarrow \frac{9+6+3}{y} = 1 \Leftrightarrow \frac{18}{y} = 1 \Leftrightarrow y = 18. \quad .$$

$$\text{Und damit erhält man aus (2): } \frac{2}{x} = \frac{3}{18} \Leftrightarrow x = 12$$

Die längere der beiden Zeiten ist 18, also das Buchstabenpaar EN

Lösungen mit Kennsilben

1 FA	20 UF	6 TH	27 CH	15 HR	4 GE	8 AB	12 TS	5 EB	25 LA	2 WI	18 EN
---------	----------	---------	----------	----------	---------	---------	----------	---------	----------	---------	----------

Lösungswort. GEWICHTHEBEN

7 Expertenaufgabe

Das in Aufg. 5 eingeführte Verfahren lässt sich auf Lineare Gleichungssysteme mit beliebig vielen Unbekannten und Gleichungen verallgemeinern und heißt das *Gauß-Verfahren*.

Betrachte das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x + 2y - z &= 0 \\2x + 3y + 4z &= 1 \\-x + y &= 2\end{aligned}$$

Addiere ein n-faches der ersten Gleichung zur zweiten so, dass der Koeffizient bei x zu 0 wird und ersetze die zweite Gleichung durch das Ergebnis der Addition.

Addiere dann ein m-faches der ersten Gleichung zur dritten so, dass du dasselbe Resultat erzielst. In den Gleichungen 2 und 3 taucht nun kein x -Glieder mehr auf.

Fahre dann mit der 2. Gleichung fort und addiere ein p-faches davon zur 3. Gleichung, so dass das Ergebnis kein y -Glieder mehr enthält.

Es ist ein neues Gleichungssystem entstanden, das die „obere Dreiecks“-Form der Aufg. 4 hat, aber dieselbe Lösung (x, y, z) wie das Ausgangssystem haben muss.

Dies ist nun einfach zu lösen.

Lösung

Addiere das (-2)-fache der ersten Gleichung auf die zweite

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.



Fit in Mathe

Musterlösung

5

August

Klassenstufe 10

$$\begin{array}{rcl} x+2y-z=0 & & x+2y-z=0 \\ 2x+3y+4z=1 & \Rightarrow & 0-y+6z=1 \\ -x+y=2 & & -x+y=2 \end{array}$$

Addiere die 1. Gleichung auf die dritte

$$\begin{array}{rcl} x+2y-z=0 & & x+2y-z=0 \\ 0-y+6z=1 & \Rightarrow & 0-y+6z=1 \\ -x+y=2 & & 0+3y-z=2 \end{array}$$

Addiere das 3-fache der zweiten Gleichung auf die dritte

$$\begin{array}{rcl} x+2y-z=0 & & x+2y-z=0 \\ 0-y+6z=1 & \Rightarrow & 0-y+6z=1 \\ 0+3y-z=2 & & 0+0+17z=5 \end{array}$$

Nun kann man von unten beginnend die Unbekannten ausrechnen. Die letzte Zeile

ergibt $z = \frac{5}{17}$,

daraus folgt in der vorletzten Zeile $-y + \frac{30}{17} = 1 \Rightarrow y = \frac{13}{17}$

und daraus in der obersten $x + \frac{26}{17} - \frac{5}{17} = 0 \Rightarrow x = -\frac{21}{17}$.

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.