Fit in Mathe

Musterlösung 1

August Klassenstufe 11

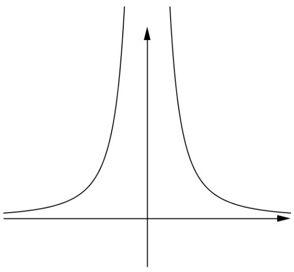
Thema	**Potenzfunktionen**

❶ Ordne den 4 Funktionsgleichungen unten die richtigen Graphen zu!

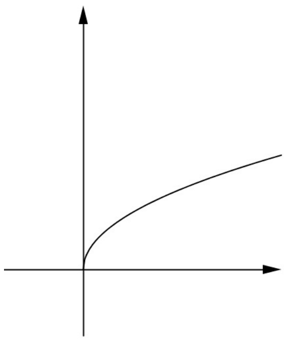
<u>Lösung</u>
Es gehören zusammen: 1 und 2 (Produkt 2),
2 und 1 (Produkt 2),
3 und 4 (Produkt 12),
4 und 3 (Produkt 12).
Die Summe der Produkte zusammengehöriger Ordnungszahlen ist 28, also Buchstabenpaar DR.

1. $f_1(x)=x^{\frac{1}{2}}$ 2. $f_2(x)=x^{-2}$ 3. $f_3(x)=x^3$ 4. $f_4(x)=x^2$

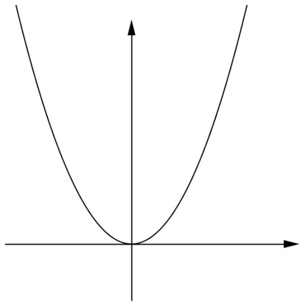
1.



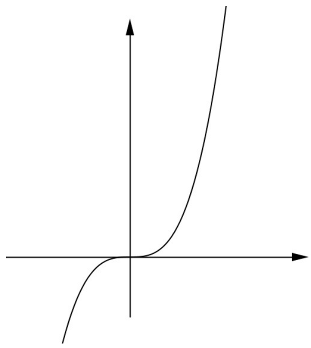
2.



3.



4.



❷ Die unten dargestellten Funktionen haben alle die Gestalt $f(x)=x^n$ mit $n \in \{-2,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ 2,\ \pi,\ 5\}$

<u>Lösung</u>

f_1 hat den Exponenten 2

f_2 hat den Exponenten π

f_3 hat den Exponenten 5

g_1 hat den Exponenten -2

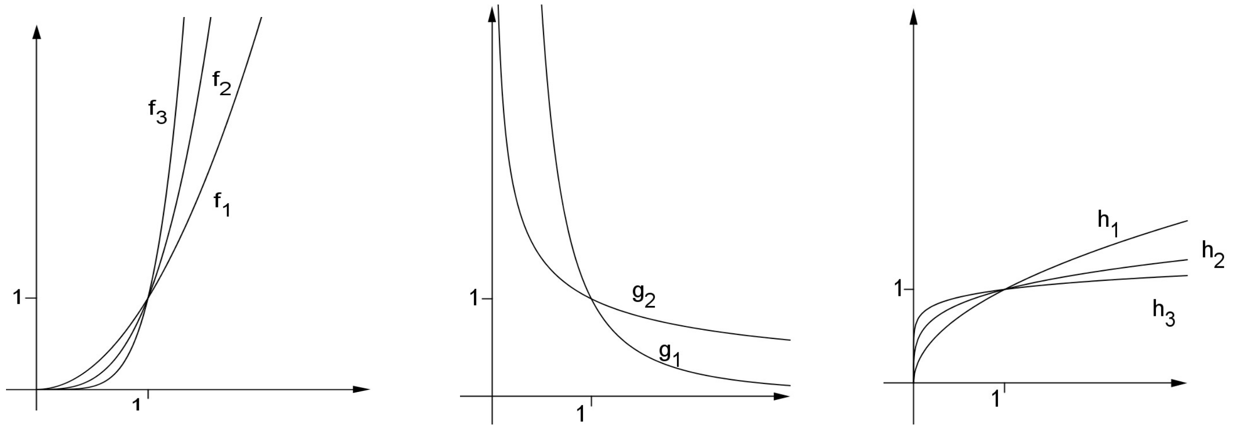
g_2 hat den Exponenten $-\frac{1}{2}$

h_1 hat den Exponenten $\frac{1}{2}$

h_2 hat den Exponenten $\frac{1}{4}$

h_3 hat den Exponenten $\frac{1}{8}$

Die Summe der Exponenten von f_3 , g_2 und h_1 ist 5, also Buchstabenpaar UC



❸ Bestimme den maximalen Definitionsbereich (Df) einer Potenzfunktion $f(x)=x^r$ für die folgenden r :

r= \ Df	reelle Zahlen	reelle Zahlen ohne 0	positive reelle Zahlen	nicht-negative reelle Zahlen
positive ganze Zahl	x			
nicht-positive ganze Zahl		x		
reelle Zahl			x	
Positive reelle Zahl				x

<u>*Lösung*</u>
wie oben in der Tabelle angekreuzt.
Die Anzahl der Kreuze in den grau hinterlegten Feldern ist 4, also Buchstabenpaar KS

❹ Folgende Punkte sind gegeben:
a) $(0/0)$ b) $(1/2)$ c) $(2/8)$ d) $(2/-4)$ e) $(-8/2)$ f) $(-1/-1)$ g) $(-1/1)$
Bestimme die Menge aller Exponenten r von möglichen Potenzfunktionen $f(x)=x^r$, auf deren zugehörigen Graphen die Punkte liegen könnten.

<u>*Lösung*</u>
zu a) positive ganze Zahlen
zu b) durch kein r lösbar
zu c) $r=3$
zu d) durch kein r lösbar
zu e) durch kein r lösbar
zu e) durch kein r lösbar
zu f) r ungerade ganze Zahl
zu g) r gerade ganze Zahl

3 Punkte liegen auf keinem Graphen, also Buchstabenpaar CH.

❺ Ein kugelförmiger Luftballon wird in 27 Sekunden auf einen Durchmesser von 30 cm aufgeblasen. Stelle eine Funktionsgleichung $D(t)$ auf, wie der Durchmesser $D = D(t)$ sich bei gleicher Luftzufuhr mit der Zeit t verändert.

Lösung

Das Volumen einer Kugel ist $V = \frac{\pi}{6} \cdot D^3$. Wenn gleichmäßig geblasen wird, verändert sich das Luftvolumen linear, d.h. $V = m \cdot t$.

Durch Gleichsetzen und Umstellen nach D ergibt sich

$D = \sqrt[3]{\frac{6m}{\pi}} \cdot \sqrt[3]{t}$ oder $D(t) = \sqrt[3]{\frac{6m}{\pi}} \cdot t^{\frac{1}{3}}$.

Da nach 27 Sekunden ein Durchmesser von 30 cm erreicht ist, gilt

$30 = D(27) = \sqrt[3]{\frac{6m}{\pi}} \cdot 27^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow 10 = \sqrt[3]{\frac{6m}{\pi}}$,

also lautet die Funktion $D(t) = 10 \cdot t^{\frac{1}{3}}$.

Will man einen Durchmesser von 40 cm erreichen, muss man die Gleichung lösen:

$40 = 10 \cdot t^{\frac{1}{3}}$ mit der Lösung $t = 64$.

Damit er einen Durchmesser von 40 cm hat, muss man 64 s blasen, also Buchstabenpaar RI.

❻ Der zurückgelegte Weg s eines fallenden Gegenstandes berechnet sich mit der Potenzfunktion $s(t) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$, wenn die Bremsung durch den Luftwiderstand nicht berücksichtigt wird ($g \approx 10 \frac{m}{s^2}$).

Stelle eine Formel auf, welches Wegstück der Gegenstand in der t -ten Sekunde zurücklegt. Bestimme seine Durchschnittsgeschwindigkeit in dieser Sekunde.

Lösung

In $t-1$ Sekunden legt der Gegenstand die Distanz $s(t-1)$ zurück, also in der t -ten Sekunde die Strecke $\Delta(t) = s(t) - s(t-1) = 5 \cdot (t^2 - (t-1)^2) = 5 \cdot (2t-1)$.

Seine Durchschnittsgeschwindigkeit ist $\frac{\Delta(t)}{1} = 5 \cdot (2t-1)$.

Er legt mehr als 100 m zurück, wenn $5 \cdot (2t-1) > 100 \Leftrightarrow t > 10{,}5$ und das ist die 11. Sekunde.

Er legt erstmals mehr als 100 m in der 11. s zurück , also Buchstabenpaar FT.

Fit in Mathe

Musterlösung

August

Klassenstufe 11

Lösungen mit Kennsilben											
24 SS	11 FT	28 DR	14 GU	4 KS	7 RO	11 RK	5 UC	15 WE	3 CH	22 HR	64 RI

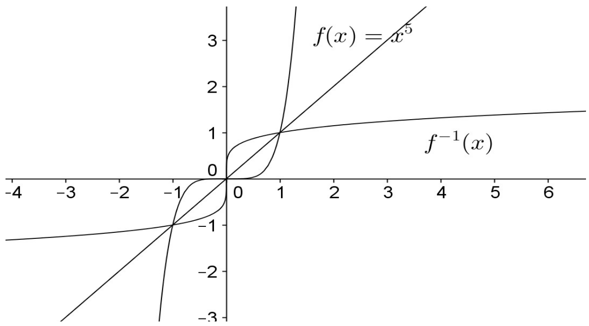
Lösungswort: DRUCKSCHRIFT

❼ Expertenaufgabe

Die Funktion $f(x)=x^5$ ist für alle reelle Zahlen definiert und auf dem ganzen Definitionsbereich umkehrbar, da unterschiedlichen x-Werten auch immer unterschiedliche y-Werte zugewiesen werden.

Wie sieht der Graph der Umkehrfunktion aus? Wie lautet seine Funktionsgleichung? (Hinweis: abschnittsweise Definition erforderlich!)

Lösung



Der Graph der Umkehrfunktion ergibt sich durch Spiegelung des Ursprungsgraphen an der Winkelhalbierenden durch den 1. und 3. Quadranten.

Für $x>0$ lässt sich die Umkehrfunktion von $f(x) = y = x^5$ durch die Umformung $y^{\frac{1}{5}} = x$ als $f_1(x) := x^{\frac{1}{5}}$ ermitteln.

Für $x<0$ ist $y = x^5$ negativ und liegt daher außerhalb des Definitionsbereiches von $f_1(x) = x^{\frac{1}{5}}$, aber die Funktion $f_2(x) := -(-x)^{\frac{1}{5}}$ ist definiert und leistet für diesen Bereich die Umkehrung, denn

$$f_2(f(x))=-(-x^5)^{\frac{1}{5}} = -((-x)^5)^{\frac{1}{5}} = -(-x) = x$$ bzw.

$$f(f_2(x)) = (-(-x)^{\frac{1}{5}})^5 = (-1)^5 \cdot ((-x)^{\frac{1}{5}})^5 = (-1)\cdot(-x) = x \; .$$

$f_1(x)$ und $f_2(x)$ sind für $x=0$ nicht definiert, aber $\lim_{x\to 0} f_1(x) = \lim_{x\to 0} f_2(x) = 0$, so dass man eine Umkehrfunktion mit dem maximalen Definitionsbereich der reellen Zahlen definieren kann als

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \textit{für}\; x>0 \\ 0 & \textit{für}\; x=0 \\ f_2(x) & \textit{für}\; x<0 \end{cases}$$