Fit in Mathe

Musterlösungen

August

Klassenstufe 12

Thema **Ableitungsregeln**

❶ Bestimme die Ableitungen folgender Funktionen

1) $f(x)=c \quad (c\in R)$ 2) $f(x)=x^{n+2} \quad (n\in N)$ 3) $f(x)=e^x$ 4) $f(x)=\sin(x)$

5) $f(x)=\cos(x)$ 6) $f(x)=2e^x+3x^4+10\sin(x)$

<u>Lösung</u>

zu 1) $f'(x)=0$ *zu 2)* $f'(x)=(n+2)x^{n+1}(f'(0)=0)$ *zu 3)* $f'(x)=e^x \ (f'(0)=1)$

zu 4) $f'(x)=\cos(x) \ (f'(0)=1)$ *zu 5)* $f'(x)=-\sin(x) \ (f'(0)=0)$

zu 6) $f'(x)=2e^x+12x^3+10\cos(x) \ (f'(0)=12)$

Die Summe der f'(0) ist 14.

❷ Die Produktregel für die Ableitung eines Produktes $P(x)=f(x)\cdot g(x)$ zweier differenzierbarer Funktionen lautet: $P'(x)=f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x)$.

Bilde die Ableitungen von

1) $P(t)=t e^t$ 2) $P(x)=x^2\cdot x^{1/2}$ 3) $P(x)=\sin(x)e^x x^2$

<u>Lösung</u>

zu 1) $P'(t)=e^t+te^t \ (P'(0)=1)$ *zu 2)* $P'(x)=\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} \ (P'(0)=0)$

zu 3) $P'(x)=\cos(x)(e^x x^2)+\sin(x)(e^x x^2)'=\cos(x)e^x x^2+\sin(x)e^x x^2+\sin(x)e^x 2x$
$(P'(0)=0)$

Die Summe aller Ableitungswerte $P'(0)$ *ist 1.*

❸ Die Quotientenregel für die Ableitung eines Quotienten $Q(x)=f(x)/g(x)$ zweier differenzierbarer Funktionen lautet: $Q'(x)=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$.

Bilde die Ableitungen von:

a) $Q(x)=\frac{10x}{x^2+1}$ b) $Q(x)=\frac{-9e^x}{3e^x+4x}$ c) $Q(x)=\frac{\sin(x)}{x+1}$

<u>Lösung</u>

zu a) $Q'(x)=\frac{10-10x^2}{(x^2+1)^2} \ (Q'(0)=10)$ *zu b)* $Q'(x)=\frac{36e^x(1-x)}{(3e^x+4x)^2} \ (Q'(0)=4)$

zu c) $Q'(x)=\frac{\cos(x)(x+1)-\sin(x)}{(x+1)^2} \ (Q'(0)=1)$

Die Summe der Ableitungswerte $Q'(0)$ *ist 15.*

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.

❹ Gegeben sind die Funktionen (i) $f(x)=\sin(x)$ (ii) $g(x)=x^{-\frac{1}{2}}$ (iii) $h(x)=\frac{1}{x}$

Bestimme folgende zusammengesetzte Funktionen

1) $f(g(h(x)))$ 2) $g(h(f(x)))$ 3) $h(g(f(x)))$ 4) $f(h(g(x)))$ 5) $g(f(h(x)))$

6) $h(f(g(x)))$

Lösung

	1	2	3	4	5	6
$\sin(\sqrt{x})$	x			x		
$\sqrt{\sin(x)}$		x	x			
$(\sqrt{\sin(x^{-1})})^{-1}$					x	
$(\sin(\frac{1}{\sqrt{x}}))^{-1}$						x

Die Anzahl der Kreuze in den grau hinterlegten Feldern ist 3.

❺ Die Kettenregel der Ableitungen besagt: $(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$

Bilde die Ableitungen der Funktionen:·

1) $F(x)=\sin(x^2)$ 2) $F(x)=(4\cos(x))^2$ 3) $F(x)=e^{2\sin(x^2)}$

Lösung

zu 1) $F'(x)=\cos(x^2)2x$ $(F'(0)=0)$ *zu 2)* $F'(x)=-32\cos(x)\sin(x)$ $(F'(0)=0)$

zu 3) $F'(x)=e^{2\sin(x^2)}4\cos(x^2)x$ $(F'(0)=0)$

Die Summe der Ableitungswerte $F'(0)$ *ist 0.*

❻ Die Funktion $F(x)=x^a$ kann für jedes reelle a und jedes x > 0 definiert werden als $F(x)=e^{a\ln(x)}$. Es gilt außerdem $(\ln(x))'=\frac{1}{x}$.

a) Leite eine Ableitungsregel her für $F(x)=x^a$.

b) Leite aus der Kettenregel und dem Ergebnis aus a) eine Ableitungsregel her für:

$F(x)=\frac{1}{g(x)}$ (Vergleiche mit der Quotientenregel).

c) Gegeben seien differenzierbare Funktionen $f(x)$ und $g(x)$. Wenn $f(x)>0$ ist, kann man wie oben eine Funktion $F(x)=f(x)^{g(x)}$ definieren. Leite für diese Funktion eine Ableitungsregel her.

Lösung

zu a) $F'(x)=(x^a)'=(e^{a\ln(x)})'=e^{a\ln(x)}\frac{a}{x}=x^a\frac{a}{x}=a\,x^{a-1}$

zu b) $F'(x)=(g(x)^{-1})'=(-1)(g(x))^{-2}g'(x)=\frac{-g'(x)}{(g(x))^2}$

und nach Quotientenregel $F'(x)=\frac{0\cdot g(x)-g'(x)}{(g(x))^2}=\frac{-g'(x)}{(g(x))^2}$

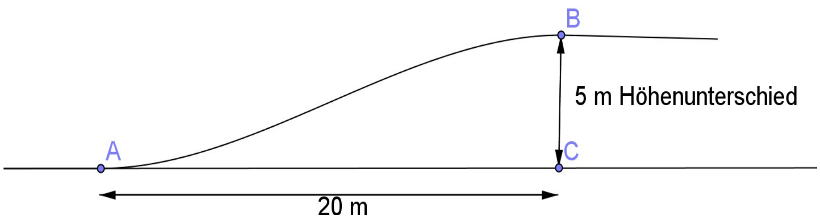
zu c) $F'(x)=(f(x)^{g(x)})'=(e^{g(x)\ln(f(x))})'=f(x)^{g(x)}(g'(x)\ln(f(x))+g(x)(\ln(f(x)))')$

$$=f(x)^{g(x)}(g'(x)\ln(f(x))+g(x)\frac{f'(x)}{f(x)})$$

$$=f(x)^{g(x)}g(x)(\frac{g'(x)}{g(x)}\ln(f(x))+\frac{f'(x)}{f(x)})$$

Für $f(x)=g(x)=x$ *ist im Fall b)* $F'(1)=-1$ *und im Fall c)* $F'(1)=1$, *also in beiden Fällen* $|F'(1)|=1$.

7



Ein Höhenunterschied zwischen zwei Ebenen ist so zu überwinden, dass der Profilverlauf durch ein Polynom möglichst kleinen Grades beschrieben werden kann, das an den Enden stetig differenzierbare Übergänge hat. Bestimme das Polynom!

<u>Lösung</u>

Wir legen ein Koordinatensystem mit dem Ursprung in den Punkt A. Zwischen die Punkte A und B der Profilkurve wollen wir den Graphen eines Polynoms legen, das an den Anschlusspunkten stetig und differenzierbar ist. Aus dieser Forderung ergeben sich insgesamt vier Bedingungen, für die man ein Polynom 3. Grades mit 4 unbekannten Koeffizienten ansetzen kann, nämlich $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ *mit* $f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

Es ergeben sich dann die 4 Gleichungen

(1) $f(0)=0=a\ 0+b\ 0+c\ 0+d$

(2) $f'(0)=0=3\ a\ 0+2\ b\ 0+c$

also folgt aus (1) und (2): $d=c=0$.

(3) $f(20)=5=a\,20^3+b\,20^2=8000\,a+400\,b$

(4) $f'(20)=0=3a\,20^2+2b\,20=1200\,a+40\,b$

Die Gleichungen (3) und (4) bilden ein lineares Gleichungssystem mit der Lösung $a=-\frac{1}{800}$ *und* $b=\frac{3}{80}$ *. Das gesuchte Polynom lautet also*

$f(x)=-\frac{1}{800}x^3+\frac{3}{80}x^2$. Der *positive kleinste gemeinsame Nenner der Koeffizienten ist 800.*

Die Lösungszahlen in der richtigen Reihenfolge sind:	14	1	15	3	0	1	800

❽ <u>Expertenaufgabe</u>

Leite mit Hilfe der Kettenregel aus der Identität $f^{-1}(f(x))=x$ die Ableitungen folgender Funktionen her.·

1) $g(x)=\ln(x)$ 2) $g(x)=\arcsin(x)$ 3) $f(x)=\arctan(x)$

<u>Lösung</u>

Die Gleichung $f^{-1}(f(x))=x$ *bedeutet, dass die Verknüpfung einer Funktion f und der inversen gleich der identischen Funktion* $i(x)=x$ *ist. Für diese gilt* $i'(x)=1$ *.*
Die linke Seite obiger Gleichung leiten wir mit der Kettenregel ab und erhalten $(f^{-1}(f(x)))'=(f^{-1})'(f(x))f'(x)$ *. Da die Funktionen gleich waren, müssen auch die Ableitungen gleich sein, also ist* $(f^{-1})'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}$ *.*

Setzt man nun $y=f(x)$ *, so erhält man*

$$(*)\quad (f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}\ .$$

zu 1) Setze $f(x)=e^x$ *Für die Umkehrfunktion* $\ln: R_+\to R$ *gilt* $\ln(e^x)=x$ *.*

Dieses in Gleichung (*) eingesetzt ergibt $\ln'(y)=\frac{1}{e^{\ln(y)}}=\frac{1}{y}$ *für alle* $y\in R_+$

zu 2) Setze $f(x)=\sin(x)$. $\sin(x)$ *ist nicht auf dem gesamten Definitionsbereich invertierbar. Standardmäßig schränkt man auf das Intervall* $[-90°,90°]$ *ein und betrachtet hier die Umkehrfunktion* $\arcsin:[-1,1]\to[-90°,90°]$ *.*

Es ist $f'(x)=\sin'(x)=\cos(x)$ *und für* $x\in[-90°,90°]$ *gilt* $\cos(x)=\sqrt{1-\sin^2(x)}$ *.*
Insgesamt bekommt man damit aus der Gleichung (*) :

$$\arcsin'(y)=\frac{1}{\cos(\arcsin(y))}=\frac{1}{\cos(x)}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}}=\frac{1}{\sqrt{1-(\sin(\arcsin(y)))^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

zu 3) Setze $g(x)=\tan(x)$ *. Wie unter 2) müssen wir den Definitionsbereich einschränken, um eine inverse Funktion definieren zu können. Standardmäßig nimmt man das Intervall* $[-90°,90°]$ *mit der Umkehrfunktion* $\arctan: R\to[-90°,90°]$ *.*

Weiter ist $f'(x)=\tan'(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}=\frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\cos^2(x)}=\tan^2(x)+1$ *.*

Aus der Gleichung (*) ergibt sich schließlich

$$\arctan'(y)=\frac{1}{\tan^2(\arctan(y))+1}=\frac{1}{1+y^2}$$