



Fit in Mathe

Musterlösungen

Dezember

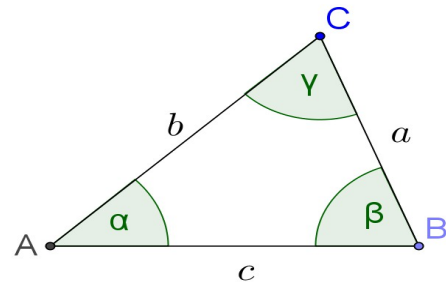
Klassenstufe 10

Thema

Trigonometrie (Taschenrechner erlaubt)

- 1 Drei Bestimmungsstücke sind gegeben.
Bestimme die fehlenden Seiten.

- a) $\gamma = 60^\circ$, $b = 10$, $c = 10$
- b) $\gamma = 90^\circ$, $b = 3$, $c = 5$
- c) $\gamma = 120^\circ$, $a = 4$, $b = 4$
- d) $\gamma = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $c = 5$



Lösung

Zu a) Aus dem Sinussatz folgt:

$$\frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{b}{\sin(\beta)} \Rightarrow \sin(\beta) = \frac{10}{10} \cdot \sin(\gamma) \Rightarrow \beta = \gamma = 60^\circ \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

Also handelt es sich um ein gleichseitiges Dreieck, deswegen ist auch $a = 10$.

Zu b) Wegen des Satzes des Pythagoras ist:

$$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow a^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow a = 4$$

zu c) Das Dreieck ist gleichschenkelig, deswegen ist $\alpha = \beta = 30^\circ$.

$$\text{Daraus ergibt sich: } \cos(30) = \frac{2}{4} \Rightarrow \frac{c}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow c = 4 \cdot \sqrt{3} \approx 6,9$$

zu d) Da im Dreieck die Winkelsumme 180° ist, folgt aus den Winkelangaben:

$\alpha = 90^\circ$. Mit dem Sinussatz erhält man:

$$\frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{b}{\sin(\beta)} \Rightarrow b = 5 \cdot \frac{\sin(60^\circ)}{\sin(30^\circ)} \Rightarrow b = 5 \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot 2}{2} \Rightarrow b = 5 \cdot \sqrt{3} \approx 8,7$$

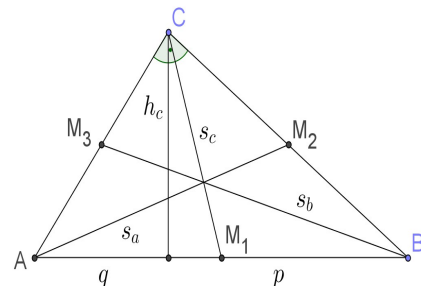
Der Satz des Pythagoras liefert hier: $a^2 = c^2 + b^2 = 25 + 75 = 100 \Rightarrow a = 10$

Die Summe aller gefundenen Seiten ist 39,6.

Das gesuchte Buchstabenpaar ist also BR.

- 2 Es handelt sich um ein Dreieck mit einem rechten Winkel γ . Bestimme die fehlenden Seiten a, b und c.

- a) $s_c = 4$, $h_c = 4$
- b) $s_c = 5$, $h_c = 4$
- c) $q = 3$, $h_c = 4$
- d) $c = 5$, $p = 3$



Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.



Fit in Mathe

Musterlösungen

Dezember

Klassenstufe 10

Lösung

zu a) Da $s_c = h_c$ handelt es sich um ein gleichschenkliges Dreieck. Die linke Hälfte allein betrachtet stellt ein Dreieck mit den Winkeln 45° , 45° und 90° und einer Seite

$h_c = 4$ dar. Dann muss sein: $\frac{c}{2} = 4 \Leftrightarrow c = 8$ und außerdem ist in diesem

Teildreieck wegen des Satzes des Pythagoras

$b^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + h_c^2 = 16 + 16 = 32 \Rightarrow b = \sqrt{32}$. Wegen der Gleichschenkligkeit ist ebenfalls:

$a = \sqrt{32}$, also das Produkt aller Seitenlängen $8 \cdot \sqrt{32} \cdot \sqrt{32} = 256$.

Zu b) Aus der Vorgabe, dass $\gamma = 90^\circ$, also ein rechter Winkel ist, folgt nach dem Satz des Thales, dass der obere Eckpunkt C auf einem Halbkreis liegt, dessen

Mittelpunkt die Seite c halbiert. Es muss also $\overline{M_1C} = s_c = \frac{c}{2}$ sein, und daher

$c = 10$.

Der Abstand d des Fusspunktes der Höhe h_c und dem Punkt M_1 ergibt sich nach Pythagoras als $d = \sqrt{s_c^2 - h_c^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$. Daraus ergeben sich die beiden Abschnitte der Grundseite c als $q = 5 + 3 = 8$ und $p = 5 - 3 = 2$. Mit Pythagoras lassen sich dann die Seiten a und b in den jeweiligen Teildreiecken ausrechnen, nämlich

$b^2 = q^2 + h_c^2 = 2^2 + 4^2 = 20 \Rightarrow b = \sqrt{20}$ und $a^2 = p^2 + h_c^2 = 8^2 + 4^2 = 80 \Rightarrow a = \sqrt{80}$, das Produkt aller gefundenen Seiten ist $10 \cdot \sqrt{20} \cdot \sqrt{80} = 10 \cdot \sqrt{20 \cdot 80} = 400$.

zu c)

Nach dem Höhensatz von Euklid gilt: $h_c^2 = q \cdot p \Rightarrow p = \frac{h_c^2}{q} = \frac{16}{3}$. Also ergibt sich

$c = q + p = 3 + \frac{16}{3} = \frac{25}{3}$. Mit Pythagoras kann man schließen

$b^2 = q^2 + h_c^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow b = 5$ und $a^2 = p^2 + h_c^2 = \left(\frac{16}{3}\right)^2 + 4^2 = \frac{400}{9} \Rightarrow a = \frac{20}{3}$

Das Produkt der Seiten ist $5 \cdot \frac{20}{3} \cdot \frac{25}{3} = \frac{2500}{9} \approx 277,8$

zu d) Aus den Angaben folgt $q = 2$.

Der Kathetensatz des Euklid sagt aus: $b^2 = q \cdot c = b^2 = 2 \cdot 5 \Rightarrow b = \sqrt{10}$. Derselbe Kathetensatz angewendet auf die andere Seite des Dreiecks liefert:

$a^2 = p \cdot c \Rightarrow a^2 = 3 \cdot 5 \Rightarrow a = \sqrt{15}$.

Also ist das Produkt aller Seitenlängen: $5 \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{15} = 5 \cdot \sqrt{150} \approx 61,2$

*Die Summe der Produkte $a \cdot b \cdot c$ ganzzahlig gerundet ist 995,
also Buchstabenpaar OM.*

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.



Fit in Mathe

Musterlösungen

Dezember

Klassenstufe 10

3 Welche der folgenden Eigenschaften kann man den folgenden Bestimmungsstücken im Dreieck zuordnen.

1) Mittelsenkrechte

3) Winkelhalbierende

2) Seitenhalbierende

4) Höhe

- a) Die _____ fällt im rechtwinkligen Dreieck mit einer Seite zusammen .
- b) Die _____ (n) schneiden sich in einem Punkt, der von allen Ecken gleich weit entfernt ist.
- c) Die _____ (n) sind umgekehrt proportional zu den Längen der Grundseiten, auf denen sie stehen.
- d) Die _____ (n) schneiden sich im Verhältnis 1 : 2.
- e) Die _____ (n) schneiden sich im Mittelpunkt des größten einbeschriebbaren Kreises.
- f) Die _____ (n) teilen das Dreieck jeweils in zwei flächengleichen Teile.
- g) Die _____ ist die Menge aller Punkte, die von zwei Ecken gleich weit entfernt sind.
- h) Die _____ ist die Menge aller Punkt, die von zwei Seiten gleich weit entfernt sind.

Lösung

zu a) die Höhe

zu b) die Mittelsenkrechten. Der Schnittpunkt ist der Mittelpunkt des Umkreises.

zu c) die Höhen, denn es ist $h_x \cdot x = 2 \cdot \text{Fläche}$ (für $x = a, b, c$)

zu d) die Seitenhalbierenden

zu e) die Winkelhalbierenden

zu f) die Seitenhalbierenden

zu g) die Mittelsenkrechte

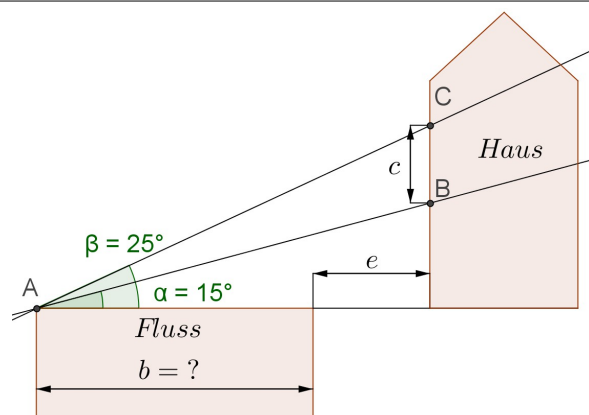
zu h) die Winkelhalbierende

Die Summe der richtigen Antworten abwechselnd mit positivem oder negativem Vorzeichen (mit + beginnend) ist $4-1+4-2+3-2+1-3 = 4$, also Buchstabenpaar BE.

4 Die vordere Wand eines Hauses steht in der Entfernung e eines Flussufers. Visiert man vom anderen Ufer zwei im Abstand c senkrecht übereinander befindliche Punkte der Hauswand an, so erhält man die Neigungswinkel α und β .

$$e = 12 \text{ m} \quad \text{und} \quad c = 8 \text{ m}$$

Berechne die Flussbreite b !



Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.



Fit in Mathe

Musterlösungen

Dezember

Klassenstufe 10

Lösung

Es sei x die Höhe des Punktes B. Dann kann man eine Gleichung aufstellen:

$$\frac{x}{b+12} = \tan(15) \Leftrightarrow x = (b+12) \cdot \tan(15)$$

Eine zweite Gleichung mit demselben x ergibt sich aus der Beziehung:

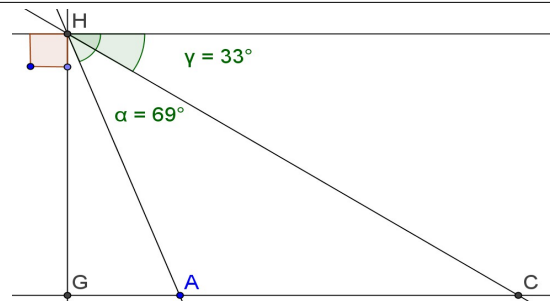
$$\frac{x+8}{b+12} = \tan(25) \Leftrightarrow x = (b+12) \cdot \tan(25) - 8$$

Nach Gleichsetzen der rechten Seiten obiger Gleichungen für x erhält man:

$$(b+12) \cdot \tan(15) = (b+12) \cdot \tan(25) - 8$$
$$\Leftrightarrow b = \frac{8}{\tan(25) - \tan(15)} - 12 \approx 28,3$$

Die Flussbreite ganzzahlig gerundet ist 28 m, also Buchstabenpaar ER.

- 5 Ein Freiluftballon befindet sich oberhalb des Punktes G. Die Punkte A und C werden unter den gegebenen Tiefenwinkeln gesehen. Wie hoch schwebt der Ballon oberhalb G, wenn die Punkte A und C den Abstand 1600 m voneinander haben?



Lösung

Der Abstand zwischen G und A sei x und die Höhe des Ballons h . Dann lässt sich die Gleichung aufstellen:

$$\frac{x}{h} = \tan(90^\circ - 69^\circ) = \tan(21^\circ) \Leftrightarrow x = h \cdot \tan(21)$$

Eine zweite Gleichung ergibt sich aus der Beziehung:

$$\frac{x+1600}{h} = \tan(90^\circ - 33^\circ) = \tan(57^\circ) \Leftrightarrow x = h \cdot \tan(57) - 1600$$

Durch Gleichsetzen der rechten Seiten obiger Gleichungen erhält man:

$$h \cdot \tan(21) = h \cdot \tan(57) - 1600$$
$$\Leftrightarrow h = \frac{1600}{\tan(57) - \tan(21)} \approx 1384$$

Die Höhe ganzzahlig gerundet ist also 1384 m, also Buchstabenpaar EN.

Lösungen mit Kennsilben

28	24	894	3	1385	39,6	26	1	995	27	25	1485	4	1384	994
ER	BI	NF	IT	IN	BR	UE	EN	OM	WE	KO	RE	BE	EN	RN

Lösungswort: BROMBEEREN

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.



Fit in Mathe

Musterlösungen

Dezember

Klassenstufe 10

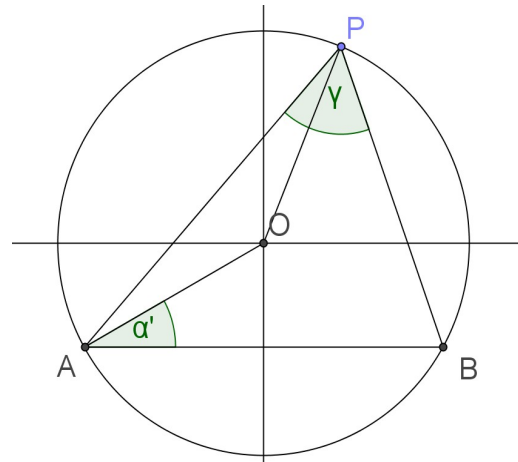
6 Experten Aufgabe (verallgemeinerter Thalesatz)

Die Strecke \overline{AB} ist eine Sekante im Kreis. Der obere Eckpunkt des Dreiecks P liege irgendwo auf dem Kreis. Dann ist der Winkel γ unabhängig von der Lage von P immer gleich.

Beweise diese Aussage !

Hinweis:

Was kann man über die Strecken \overline{OP} und \overline{OA} aussagen ? Ist α' von der Lage von P abhängig ?



Lösung

Mit $\sphericalangle ABC$ wollen wir einen Winkel bezeichnen, der von den beiden Schenkeln \overline{AB} und \overline{CB} eingefasst wird, d.h. der in der Mitte stehende Punkt - hier B - ist der Scheitel und der Winkel ist der, der überstrichen wird, wenn \overline{AB} im mathematisch positiven Sinne um B auf \overline{CB} gedreht wird. Die Bezeichnung der Winkel in obigem Dreieck ABP sei ansonsten standardmäßig und der Winkel $\sphericalangle OBP$ sei analog zu α' mit β' bezeichnet.

Die beiden im obigen Hinweis gestellten Fragen lassen sich so beantworten:

- Die beiden Strecken \overline{OP} und \overline{OA} sind gleich lang, denn beide Strecken sind Kreisradien eines Kreises um O .
- α' ist nicht von der Lage von P abhängig, denn die Punkte A, B und O sind fix. Da $\overline{OA} = \overline{OP}$, ist das Dreieck AOP gleichschenkelig, d.h.

$$(1) \sphericalangle OAP = \sphericalangle APO.$$

Dasselbe muss natürlich auch auf der anderen Seite für das Dreieck OBP gelten, d.h.

$$(2) \sphericalangle PBO = \sphericalangle OPB.$$

Die beiden Winkel $\sphericalangle OPB$ und $\sphericalangle APO$ bilden aber in Summe den Winkel γ , d.h.

$$(3) \gamma = \sphericalangle OPB + \sphericalangle APO.$$

Im Dreieck ABP gilt:

$$\begin{aligned} \gamma &= 180 - \alpha - \beta \\ &= 180 - (\alpha' + \sphericalangle OAP) - (\beta' + \sphericalangle PBO) \\ &= 180 - \alpha' - \beta' - (\sphericalangle OAP + \sphericalangle PBO) \end{aligned}$$

Die beiden Winkel in der hinteren Klammer kann man durch die Winkel jeweils links der Gleichheitszeichen in (1) und (2) ersetzen und wegen (3) ergeben diese in Summe den Winkel γ .

Wir erhalten also eine Gleichung:

$$\gamma = 180 - \alpha' - \beta' - \gamma, \text{ also } 2\gamma = 180 - \alpha' - \beta'.$$

Da aber nach dem oben Gesagten $180 - \alpha' - \beta'$ nicht von der Lage des Punktes P abhängt, wenn er nur auf dem Kreis um O liegt, ist der Beweis erbracht.

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.