



# Fit in Mathe

Musterlösungen

Dezember

Klassenstufe 11

Thema

## Trigonometrische Funktionen

- ① Bestimme jeweils als Vielfaches von  $\pi$  alle Winkelgrößen  $x$  ( $-\pi \leq x \leq \pi$ ), für die gilt:

a)  $\cos(x) = 0,5$     b)  $\sin(x) = 1$     c)  $\sin(x) = -0,5$     d)  $\tan(x) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

e)  $\cos(x) \cdot \tan(x) = 0$     f)  $\sin(x) \cdot \cos(x) = 0$

### Lösung

zu a)  $x = -\frac{\pi}{3}$  oder  $x = \frac{\pi}{3}$     zu b)  $x = \frac{\pi}{2}$     zu c)  $x = -\frac{5\pi}{6}$  oder  $x = -\frac{\pi}{6}$

zu d)  $x = -\frac{5\pi}{6}$  oder  $x = \frac{\pi}{6}$

zu e)  $x = -\pi$  oder  $x = 0$  oder  $x = \pi$ , aber nicht definiert für  $x = -\frac{\pi}{2}$  oder  $x = \frac{\pi}{2}$

zu f)  $x = -\pi$  oder  $x = -\frac{\pi}{2}$  oder  $x = 0$  oder  $x = \frac{\pi}{2}$  oder  $x = \pi$

Die Anzahl der Lösungen aller Gleichungen ist 15, also Buchstabenpaar OC.

- ② Beschreibe, wie der Graph der jeweils gegebenen Funktion aus dem der Sinusfunktion durch Verschiebungen und Streckungen hervorgeht.

a)  $y = 5 \cdot \sin(x+6)$

b)  $y = \sin(4x-8)$

c)  $y = 3 \cdot \sin(2(x-4))$

d)  $y = 0,25 \cdot \sin(0,5x)$

### Lösung

zu a) Streckung um 5 in y-Richtung, Verschiebung um -6 in x-Richtung

zu b) Streckung mit  $\frac{1}{4}$  in x-Richtung, Verschiebung um 2 in x-Richtung

$$(y = \sin(4x-8) = \sin(4(x-2)))$$

zu c) Streckung um 3 in y-Richtung, Streckung mit  $\frac{1}{2}$  in x-Richtung, Verschiebung um 4 in x-Richtung

zu d) Streckung um 0,25 in y-Richtung, Streckung um 2 in x-Richtung.

Die Summe aller Streckungen oder Verschiebungen in x- oder y-Richtung ist

$$5 - 6 + \frac{1}{4} + 2 + 3 + \frac{1}{2} + 4 + \frac{1}{4} + 2 = 11, \text{ also Buchstabenpaar HS.}$$

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.



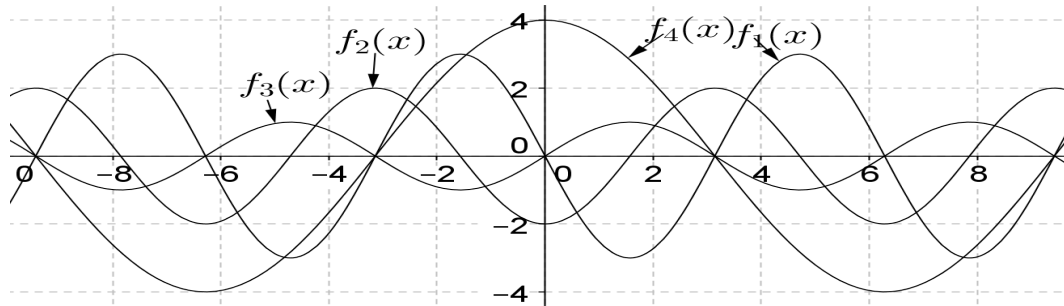
# Fit in Mathe

Musterlösungen

Dezember

Klassenstufe 11

3



Bei den oben dargestellten Funktionen handelt es sich um

a)  $f(x) = \sin(x)$    b)  $f(x) = (-3)\sin(x)$    c)  $f(x) = 4\sin(0,5x + \frac{\pi}{2})$

d)  $f(x) = 2\sin(x - \frac{\pi}{2})$

Ordne die Graphen den Funktionen zu.

Lösung

zu a)  $f_3(x)$    zu b)  $f_1(x)$    zu c)  $f_4(x)$    zu d)  $f_2(x)$

*Die Summe der Indizes in der richtigen Reihenfolge mit wechselndem Vorzeichen beginnend mit + ist  $+3-1+4-2 = 4$ , also Buchstabenpaar EN.*

4 Bestimme jeweils  $f'(x)$

a)  $f(x) = \sin(3x-4)$    b)  $f(x) = -\sin(\frac{1}{2}x) + 2\cos(\frac{1}{4}x)$    c)  $f(x) = \cos(4x^2)$

d)  $f(x) = (\sin(5\pi x - x^4))^2 + (\cos(5\pi x - x^4))^2$

Lösung

zu a)  $f'(x) = 3 \cdot \cos(3x-4)$    zu b)  $f'(x) = -\frac{1}{2}\cos(\frac{1}{2}x) - \frac{1}{2}\sin(\frac{1}{4}x)$

zu c)  $f'(x) = -8x \sin(4x^2)$

zu d)  $f'(x) = 0$ , denn für alle  $\alpha$  gilt  $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ , also speziell auch für  $\alpha = 5\pi x - x^4$  und die Ableitung einer Konstanten ist 0.

*Das Produkt aller Ableitungen an der Stelle  $x = \frac{2}{3}\pi$  ist 0 (siehe d)), also*

*Buchstabenpaar KN.*

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.



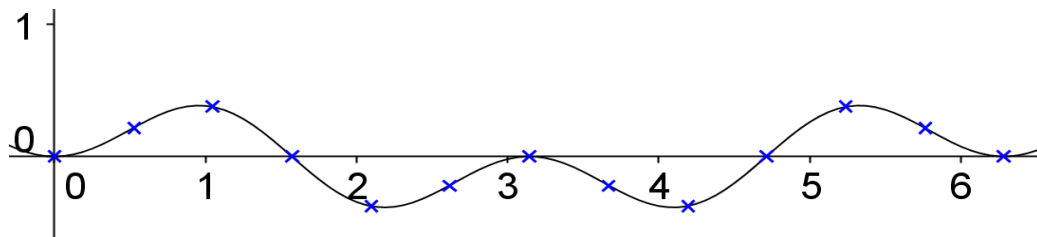
# Fit in Mathe

Musterlösungen

Dezember

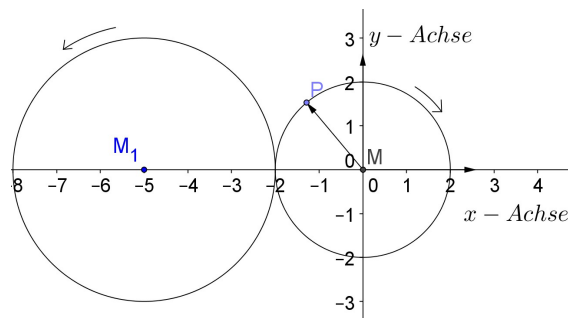
Klassenstufe 11

	6	3	2	3	6		6	3	2	3	6	
0	$\frac{\sqrt{3}}{8}$	$\frac{3}{8}$	0	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{\sqrt{3}}{8}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{8}$	$-\frac{3}{8}$	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{\sqrt{3}}{8}$	0



Die Anzahl der lokalen Extremwerte der Funktion im angegebenen Intervall ist 7, also Buchstabenpaar EC.

6



Das linke Rad mit Radius 3 dreht sich mit einer Geschwindigkeit von 5 Umdrehungen pro Sekunde (U/s) und treibt das rechte Rad, welches einen Radius von 2 hat. Zum Zeitpunkt  $t=0$  soll der Zeiger des rechten Rades auf der x-Achse liegen. Entwickle eine Funktion  $f(t)$ , die den y-Wert des Zeigers in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.



# Fit in Mathe

Musterlösungen

Dezember

Klassenstufe 11

## Lösung

Da die Anzahl der Umdrehungen pro Sekunde des linken Rades 5 ist, ist seine Winkelgeschwindigkeit  $5 \cdot (2\pi) = 10\pi \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$ , die zugehörige Bahngeschwindigkeit eines Punktes auf der Peripherie (der Zeigerspitze) des linken Rades ist

$$(10\pi) \cdot 3 = 30\pi \left[ \frac{\text{LE}}{\text{s}} \right] \quad (\text{LE} = \text{Längeneinheit}) . \text{ Dieselbe Bahngeschwindigkeit wird}$$

auf das rechte Rad übertragen. Dadurch erreicht dieses wegen des Radius 2 eine Winkelgeschwindigkeit von  $\frac{30\pi}{2} = 15\pi \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$ .

Da das zweite Rad sich im mathematisch negativen Sinne dreht, hat es nach einer Zeit  $t$  eine Winkelstellung von  $-15\pi \cdot t \left[ \text{rad} \right]$ .

Der y-Wert der Zeigerspitze in dieser Stellung ist  $f(t) = 2 \cdot \cos(-15\pi \cdot t)$ .

Die Anzahl der Umdrehungen pro Sekunde ist  $\frac{15\pi}{2\pi} = 7,5 \left[ \frac{1}{\text{s}} \right]$ .

In 4,5 s führt das zweite Rad also  $7,5 \cdot 4,5 = \frac{135}{4}$  Umdrehungen aus.

Da die Zeigerspitze in y-Richtung bei jeder Viertelumdrehung betraglich einen Weg von 2 LE zurücklegt, legt sie während dieser Zeit insgesamt 270 LE zurück.

*Die Lösungszahl ist mithin 270, also Buchstabenpaar HT.*

## Lösungen mit Kennsilben

1	9	5	0	10	300	6	11	4	270	15	7
VO	LL	ER	KN	HA	EN	RD	HS	EN	HT	OC	EC

Lösungswort: OCHSENKNECHT

## 7 Expertenaufgabe

Betrachte die Funktion  $f(x) = \sin(x)$ . Ihre Ableitung ist  $f'(x) = \cos(x)$ .

Die Funktion  $g(\alpha) = \sin^*(\alpha)$ , bei der  $\alpha$  im Gradmaß angegeben wird, ist eine andere Funktion. Z.B. ist  $g(90) = 1$  aber  $f(90) \approx 0,893996..$

Ermittle  $g'(\alpha)$ !

## Lösung

Mit  $x = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha$  ist  $f(x) = g(\alpha)$  und deswegen  $f\left(\frac{\pi}{180} \cdot \alpha\right) = g(\alpha)$ .

Mit der Kettenregel folgt dann:

$$g'(\alpha) = f'\left(\frac{\pi}{180} \cdot \alpha\right) \cdot \frac{\pi}{180} = \cos\left(\frac{\pi}{180} \cdot \alpha\right) \cdot \frac{\pi}{180} = \cos(x) \cdot \frac{\pi}{180}$$

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.