Fit in Mathe

Musterlösungen

Dezember — Klassenstufe 12

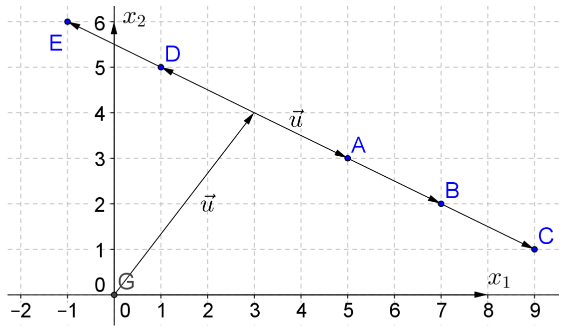
Thema	**Geraden**

❶ Vom Hauptlager O aus fährt ein Lkw zu den Lieferadressen A,B,C,D,E

a) Beschreibe die 5 Wege mithilfe der Vektoren $\vec{p}$ und $\vec{u}$. Lies die zugehörigen Koordinaten aus der Zeichnung ab.

b) Bestimme eine allgemeine Formel für die Wegebeschreibungen:

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$



Lösung

zu a) Lieferadresse von A: $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

Lieferadresse von B: $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$

Lieferadresse von C: $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lieferadresse von D: $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Lieferadresse von E: $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + (-2) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$

zu b) eine allgemeine Formel ist also $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s_i \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \end{pmatrix}$

Die Summe aller x_1 -Komponenten der Lieferadressen ist 21, also Buchstabenpaar CH.

❷ Überprüfe, ob die angegebenen Punkte auf der Geraden aus Aufgabe 1 liegen.

a) $(4|3{,}5)$ b) $(13|-1)$ c) $(-7{,}5|7{,}5)$ d) $(5|-5)$

Lösung

Ein Punkt $(x_1|x_2)$ liegt auf der Gerade, wenn es ein s gibt, so dass

$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3+s\cdot(-2) \\ 4+s\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 3+s\cdot(-2) = x_1 \; und \; 4+s\cdot 1 = x_2$ ist.

zu a) für $s = -\frac{1}{2}$ gilt: $3+(-\frac{1}{2})\cdot(-2) = 4 \; und \; 4+(-\frac{1}{2})\cdot 1 = 3{,}5$, also liegt der Punkt auf der Geraden.

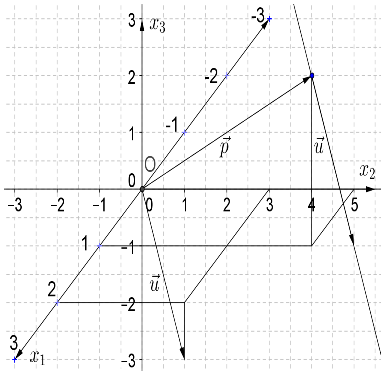
zu b) für $s = -5$ gilt: $3+(-5)\cdot(-2) = 13 \; und \; 4+(-5)\cdot 1 = -1$, also liegt der Punkt auf der Geraden.

zu c) für $s = 5{,}25$ gilt: $3+5{,}25\cdot(-2) = -7{,}5 \; aber \; 4+5{,}25\cdot 1 \neq 7{,}5$, also liegt der Punkt nicht auf der Geraden.

zu d) für $s = -1$ gilt: $3+(-1)\cdot(-2) = 5 \; aber \; 4+(-1)\cdot 1 \neq -5$, also liegt der Punkt nicht auf der Geraden.

Die Anzahl der auf der Gerade liegenden Punkte ist 2, also Buchstabenpaar RI.

❸ Bestimme mithilfe von $\vec{u}$ und $\vec{p}$ eine Parameterdarstellung der Geraden g.



Lösung

Die beiden Vektoren haben die Koordinaten $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Daher ist die Parameterdarstellung der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Die Summe der x_2 -Komponenten der Vektoren in der Parameterdarstellung ist 8, also Buchstabenpaar ST.

❹ Die Flugzeuge f,g,h fliegen geradlinig entsprechend der gegebenen Geradengleichungen.
Bestimme die Lagebeziehungen zwischen den Geraden/Flugbahnen !

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad f: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die x_2 -Komponente des Schnittpunktes ist ___.

<u>Lösung</u>

- Die Geraden g und h sind parallel zueinander, denn die Richtungsvektoren sind identisch. Die Positionsvektoren der Geraden sind aber nicht in der jeweils anderen enthalten, also sind die Geraden punktfremd.
- Die Geraden g und f haben denselben Positionsvektor, die Richtungsvektoren sind jedoch nicht kollinear, also haben sie den Schnittpunkt $(1|2|3)$.
- Die Geraden h und f sind wegen der nicht-kollinearen Richtungsvektoren nicht parallel, könnten also windschief zueinander liegen oder sich in einem Punkt schneiden.

In letzterem Fall gäbe es ein t und r mit

$$\begin{pmatrix}7\\7\\7\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}6\\5\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3r-2t\\2r-1t\\1r-3t\end{pmatrix}$$

Aus der letzten Komponentengleichung würde folgen: $r=4+3t$. Dies in die vorletzte eingesetzt ergäbe $5=8+6\text{t}-t=8+5t\Leftrightarrow t=-\frac{3}{5}$. Daraus würde sich für r ergeben $r=\frac{11}{5}$. Diese Werte von r und t in die rechte Seite der ersten Komponentengleichung eingesetzt ergibt $3\cdot\frac{11}{5}-2\cdot(-\frac{3}{5})=\frac{39}{5}\neq 6$, d.h. die Annahme, dass es einen Schnittpunkt gibt, führt zu einem Widerspruch, also sind die Geraden f und h punktfremd.

Die x_2 -Komponente des einzig vorkommenden Schnittpunktes ist also 2, d.h. Buchstabenpaar KI.

❺ Ein Flugzeug hebt im Punkt $A(300|400|0)$ von der Landebahn ab und fliegt in den ersten 5 Minuten geradlinig entsprechend der Geraden

$\vec{x}=\begin{pmatrix}300\\400\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}50\\40\\30\end{pmatrix}$ (t ist die Flugzeit in Sekunden, die Koordinaten des ersten Vektors in m, die Koordinaten des zweiten in m/s)

a) Welche Höhe hat es 5 Minuten nach dem Start erreicht?
b) Welche Position hat das Flugzeug nach 5 min Flugzeit?
c) Wie weit ist das Flugzeug zu diesem Zeitpunkt vom Punkt A entfernt (gerundet auf volle Hunderter)?

<u>Lösung</u>

zu a) Da $5\,min=300\,s$ ergibt die 3.Komponente des obigen zeitabhängigen Positionsvektors $300\cdot 30=9000\,m$. Da das Flugzeug zu Beginn die Höhe 0 hatte, hat es diese Höhe durch den 5-minütigen Flug erreicht.
Also ist die Lösungszahl hier 9000.

Zu b) Die Position nach 5 Minuten ist:

$$\vec{x}(300) = \begin{pmatrix}300\\400\\0\end{pmatrix} + 300\cdot\begin{pmatrix}50\\40\\30\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15300\\12400\\9000\end{pmatrix}$$

Lösungszahlen sind die Komponenten des letzten Vektors.

zu c) Der Abstand d zum Ausgangspunkt ergibt sich als

$$d = \sqrt{(15300-300)^2+(12400-400)^2+9000^2} = 1000\cdot\sqrt{15^2+12^2+9^2} = 1000\cdot\sqrt{450}$$
$$= 1000\cdot 15\cdot\sqrt{2} \approx 21200\,m$$

Lösungszahl ist diese Zahl

Die Quersumme als Summe aller Lösungszahlen ist 9+1+5+3+1+2+4+9+2+1+2= 39, also das Buchstabenpaar ND.

Lösungen mit Kennsilben									
2 KI	10 UM	2 RI	20 BA	39 ND	4 NN	21 CH	9 EN	1 TA	8 ST

Lösungswort: CHRISTKIND

❻ Expertenaufgabe

Um Geraden zu beschreiben, existieren mehrere Darstellungsformen:

Vektordarstellungen:

a) $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ die Punkt-Richtungsvektor-Darstellung

b) $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ $mit\ s,t\in R\ und\ s+t=1$ die Ortsvektordarstellung

Gleichungsdarstellungen

c) $x+2y-10=0$ die allgemeine Linearform

d) $\frac{1}{\sqrt{5}}x+\frac{2}{\sqrt{5}}y-2\sqrt{5}=0$ die Hessesche Normalform

e) $\frac{y-4}{x-2}=\frac{3-4}{4-2}$ die Zweipunkteform

f) $y=-\frac{1}{2}x+5$ die Funktionsgleichung

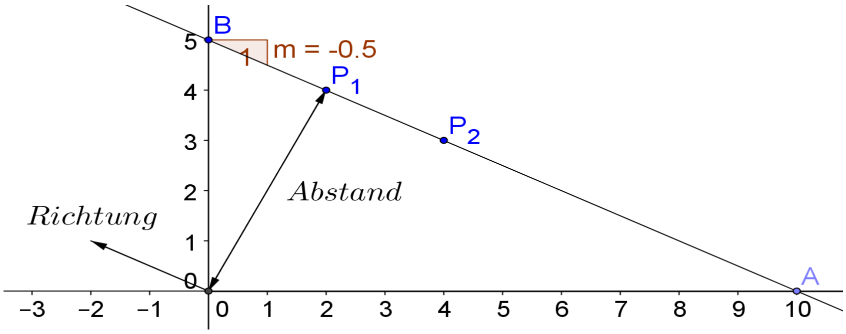
g) $\frac{x}{10}+\frac{y}{5}=1$ die Achsenabschnittsform

h) $y=-\frac{1}{2}(x-4)+3$ die Punktsteigungsform

Lies in der entsprechenden Darstellungsform ab:

1) den Abstand vom Ursprung
2) die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen
3) zwei Punkte, die auf der Geraden liegen
4) die Richtung der Geraden
5) die Steigung der Geraden

Lösung



zu 1)
Den Abstand vom Ursprung, d.i. die kürzeste Entfernung, den die Gerade vom Ursprung haben kann, liefert die Hessesche Normalform d). Die Koeffizienten bei x und y sind die Komponenten des auf die Länge 1 normierten Vektors $\overrightarrow{OP_1}$, der vom Ursprung senkrecht zur Geraden hin zeigt.

Zu 2)
Die Schnittpunkte mit den Achsen liefert die Achsenabschnittsform g). Die Koeffizienten bei x und y sind die reziproken Werte der Achsenabschnitte.
Der Schnittpunkt mit der y-Achse kann aber auch als das additive Glied in der Funktionsgleichung abgelesen werden.

Zu 3)
Die Gerade bestimmt durch zwei Punkte $P_1(x_1|y_1)$ und $P_2(x_2|y_2)$ liefert uns e), die Zweipunkteform $\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, hier mit den Punkten $P_1(2|4)$ und $P_2(4|3)$.
Ebenfalls 2 Punkte auf der Geraden können wir in b), der Ortsvektordarstellung ablesen.
Sind zwei Punkte gegeben können wir mit den obigen Darstellungen die Gerade beschreiben, die durch diese Punkte definiert ist.

Zu 4)
Die Richtung der Geraden kann man in a), der Punkt-Richtungsvektordarstellung erkennen, wobei der Richtungsvektor nicht eindeutig ist, alle Vielfachen davon sind ebenfalls Richtungsvektoren.

Zu 5)
Die Steigung erkennen wir in f) der Funktionsgleichung als Koeffizienten von x, aber auch in h), der Punkt-Steigungsformel.