



Fit in Mathe

Musterlösungen

Dezember

Klassenstufe 9

Thema

Messen

- 1 Forme die folgenden Längenmaße in m um
a) 23 km b) 89002 mm c) 29 dm d) 2921 cm e) $25 \cdot 10^7 \mu\text{m}$
(Hinweis: $1 \mu\text{m} = \frac{1}{1000} \text{ mm}$, bezeichnet als Mikrometer)

Lösung

zu a) 23000 m zu b) 89,002 m zu c) 2,9 m zu d) 29,21 m zu e) 250 m

Die Summe aller m gerundet ist 23371, also Buchstabenpaar KU.

- 2 Forme die folgenden Zeitmaße in Sekunden um
a) 0,8 min b) 21,6 min c) 0,54 h d) 0,04 d e) 0,00008 a (kein Schaltjahr)
Hinweis: min = Minute, h = Stunde, d = Tag, a = Jahr

Lösung

zu a) 48 s zu b) 1296 s zu c) 1944 s zu d) 3456 s zu e) 2522,88

Die Summe aller Werte auf ganze Zahlen gerundet ist 9267,
also Buchstabenpaar ES.

- 3 Forme die folgenden Geschwindigkeitsmaße in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ um
a) $20 \text{ cm} / \frac{1}{100} \text{ s}$ b) $30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ c) $40 \frac{\text{km}}{\text{d}}$ d) $40000 \frac{\text{km}}{\text{a}}$ (kein Schaltjahr)

Lösung

zu a) 20 zu b) $\frac{25}{3}$ zu c) $\frac{25}{54}$ zu d) $\frac{2500}{1971}$

Die Summe aller Geschwindigkeiten in m/s ganzzahlig gerundet ist 0,
also Buchstabenpaar TE.

- 4 In den angloamerikanischen Ländern sind die Einheiten
(i) Inch (in.), (ii) foot (ft.), (iii) yard (yd.), (iv) mile (m. oder mi.)
gebräuchlich.
Es ist: 1 ft. = 12 in., 1 yd = 3 ft., 1 mi. = 1760 yd.
Umrechnungsfaktor ins Metersystem ist: 1 in. = 0,0254 m.
Rechne um (alle zu bestimmenden Größen gerundet ohne Nachkommastellen):
a) $440 \text{ yd} \approx x \text{ m}$ b) $9 \text{ yd} \approx x \text{ cm}$ c) $2 \text{ mi } 250 \text{ yd} \approx x \text{ m}$ d) $10 \text{ km} = x \text{ mi } y \text{ yd } z \text{ ft}$

Lösung

zu a) 402 m zu b) 823 cm zu c) 3447 m zu d) 6 mi 376 yd 4 ft

Die Summe aller zu bestimmenden Größen ist 5058, also Buchstabenpaar NG.

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.



Fit in Mathe

Musterlösungen

Dezember

Klassenstufe 9

- 5 Bestimme jeweils die Anzahl der Nullen bei der Umrechnung von den angegebenen Einheiten:
- a) $1 \text{ km} = 10^x \text{ m}$ b) $1 \text{ m}^2 = 10^x \text{ cm}^2$ c) $1 \text{ m}^3 = 10^x \text{ cm}^3$ d) $1 \text{ ha} = 10^x \text{ m}^2$
e) $1 \text{ Liter} = 10^x \text{ dm}^3$ f) $1 \text{ ar} = 10^x \text{ cm}^2$ g) $1 \text{ kg} = 10^x \text{ g}$ h) $1 \text{ t} = 10^x \text{ g}$
(Hinweise: $1 \text{ ar} = 100 \text{ m}^2$)

Lösung

zu a) $x=3$ zu b) $x=4$ zu c) $x=6$ zu d) $x=4$ zu e) $x=0$ zu f) $x=6$
zu g) $x=3$ zu h) $x=6$

Die Summe aller x -Werte ist 32, also Buchstabenpaar EW.

- 6 a) Die Kanten eines Rechtecks werden mit einer Genauigkeit von $\pm 1\%$ gemessen. Innerhalb welcher Genauigkeit liegt die Fläche (gerundet auf ganze Prozentwerte)?
b) Die Kanten eines Quaders werden mit einer Genauigkeit von $\pm 1\%$ gemessen. Innerhalb welcher Genauigkeit liegt das Volumen (gerundet auf ganze Prozentwerte)?
c) Für die Ermittlung einer Geschwindigkeit wird der Weg innerhalb einer Genauigkeit von $\pm 0,5\%$ und die Zeit innerhalb einer Genauigkeit von $\pm 2,5\%$ gemessen. Innerhalb welcher Genauigkeit kann man die Geschwindigkeit angeben (gerundet auf ganze Prozentwerte) ?

Lösung

zu a) Es seien a und b die Kantenlängen einer Fläche F .
Dann ist die größtmögliche Fläche innerhalb der Messtoleranz

$$F_{\max} = a \cdot 1,01 \cdot b \cdot 1,01 = ab \cdot 1,01^2 \approx ab \cdot 1,02 \quad \text{und die}$$

kleinstmögliche Fläche innerhalb der Toleranz

$$F_{\min} = a \cdot 0,99 \cdot b \cdot 0,99 = ab \cdot 0,99^2 \approx ab \cdot 0,98 \quad ,$$

also liegt die gemessene Fläche innerhalb $\pm 2\%$ der rechnerischen.

zu b) Es seien a, b und c die Kantenlängen eines Quaders Q .
Dann ist das größtmögliche Volumen innerhalb der Messtoleranz

$$V_{\max} = a \cdot 1,01 \cdot b \cdot 1,01 \cdot c \cdot 1,01 = abc \cdot 1,01^3 \approx abc \cdot 1,03 \quad \text{und das}$$

kleinstmögliche Volumen innerhalb der Toleranz

$$V_{\min} = a \cdot 0,99 \cdot b \cdot 0,99 \cdot c \cdot 0,99 = abc \cdot 0,99^3 \approx abc \cdot 0,97 \quad ,$$

also liegt das gemessene Volumen innerhalb $\pm 3\%$ des rechnerischen.

zu c) Es sei a der Weg und b die Zeit einer zu bestimmenden Geschwindigkeit

$$v = \frac{a}{b} \quad ,$$

Dann ist die Geschwindigkeit am größten, wenn der Weg möglichst lang und die Zeit kurz ist, d.h. zur Bestimmung von v kann man innerhalb der Messtoleranz

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.



Fit in Mathe

Musterlösungen

Dezember

Klassenstufe 9

ansetzen: $v_{max} = \frac{a \cdot 1,005}{b \cdot 0,975} \approx \frac{a}{b} \cdot 1,03$. Die kleinstmögliche Geschwindigkeit ergibt sich innerhalb der Messtoleranz als:

$v_{max} = \frac{a \cdot 0,995}{b \cdot 1,025} \approx \frac{a}{b} \cdot 0,97$, also liegt die gemessene Geschwindigkeit in einem Toleranzbereich von $\pm 3\%$ um die berechnete.

Die Summe aller Prozentwerte ist also 8, also Buchstabenpaar AE.

- 7** Ein flaches, ebenes und rechteckiges Carportvordach der Länge 7,5 m und der Breite 60 cm wird mit quadratischen Schindeln der Größe 15 cm x 15 cm belegt. Wie viel Schindeln werden benötigt?
Hinweis: Nimm vereinfachend an, dass sich die Schindeln beim Belegen nicht überlappen.

Lösung

Von den Maßen her passen $750 \text{ cm} : 15 \text{ cm} = 50$ Schindeln nebeneinander und $60 \text{ cm} : 15 \text{ cm} = 4$ Reihen übereinander, also braucht man $50 \cdot 4 = 200$ Schindeln.

Die Anzahl der Schindeln ist also 200, d.h. Buchstabenpaar SS.

- 8** Ein Architekt entwirft einen Wohnraum mit einer ursprünglich rechteckigen Grundfläche der Länge 8,2 m und der Breite 5,3 m. Eine Raumecke soll nun für einen überdachten Terrassenzugang um 45° abgeschrägt werden. Wie groß ist die Fläche F des Wohnraumes, wenn der Terrassenzugang eine Gesamtbreite von 2,3 m hat?

Die Raumgröße auf ganze m^2 gerundet ist ____

Lösung

Wegen des Satzes des Pythagoras ist

$2 \cdot (\overline{DF})^2 = 2,3^2 = 5,29 \text{ m}^2$. Für die Fläche des Dreiecks $\triangle CFD$ gilt dann:

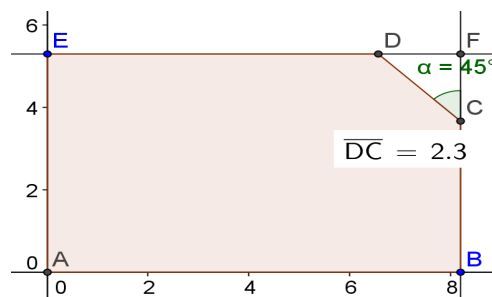
$$F(\triangle CFD) = \frac{1}{2} (\overline{DF})^2 = 1,3225 \text{ m}^2.$$

Diese Fläche muss von der Fläche F des Raumes subtrahiert werden, d.h.

$$F = 8,2 \cdot 5,3 - 1,3225 = 42,1375 \approx 42 \text{ m}^2$$

Die Lösungszahl ist also 42,

d.h. Buchstabenpaar ER.



Lösungen mit Kennsilben

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.



Fit in Mathe

Musterlösungen

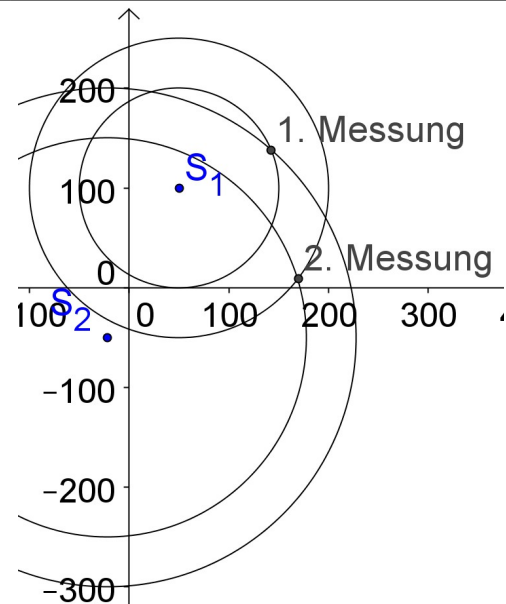
Dezember

Klassenstufe 9

4	200	9270	38	30	8	31	23371	5058	5060	9267	220	32	42
ES	SS	LE	ES	TE	AE	SF	KU	NG	ON	ES	AL	EW	ER

Lösungswort: KUESTENGEWAESSER

- 9 (Expertenaufgabe, Prinzip der Positions-messung durch GPS)
Angenommen du befändest dich im ersten Quadranten eines zweidimensionalen Raumes. An den festen Positionen $S_1(50|100)$ und $S_2(-20|-50)$ befinden sich zwei Stationen, die ein Signal deines Senders beantworten. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Signals sei 1000 LE/ZE (d.h. Längeneinheit pro Zeiteinheit).
Zum Zeitpunkt t_0 sei die Antwortzeit von S_1 0,1 ZE und von S_2 0,25 ZE. Zum Zeitpunkt t_1 werden die entsprechenden Antwortzeiten als 0,15 ZE und 0,2 ZE gemessen.
Bestimme graphisch die Koordinaten deiner Positionen und die Funktionsgleichung der Geraden, auf der du dich bewegst.



Lösung

Es sei $c = 1000$ die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Signals. r_1 und r_2 seien die Abstände zu den Stationen S_1 und S_2 bei der ersten Messung und r_1' und r_2' die Abstände bei der 2. Messung.

An Hand der gemessenen Werte kann man feststellen, dass bei der ersten Messung $r_1 = c \cdot t_0 = 1000 \cdot 0,1 = 100$ LE und $r_2 = c \cdot t_0 = 1000 \cdot 0,25 = 250$ LE waren.

Alle Punkte $(x|y)$ mit einem Abstand r_1 von S_1 erfüllen die Gleichung:

$$(50-x)^2 + (100-y)^2 = 100^2$$

$$(1) \Leftrightarrow 2500 - 100x + x^2 + 10000 - 200y + y^2 = 10000$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 100x - 200y = -2500$$

In gleicher Weise ergibt sich für den Abstand r_2 zu S_2 :

$$(-20-x)^2 + (-50-y)^2 = 250^2$$

$$(2) \Leftrightarrow 400 + 40x + x^2 + 2500 + 100y + y^2 = 62500$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 40x + 100y = 59600$$

Durch Subtraktion von (1) und (2) erhält man die Gleichung:

$$-140x - 300y = -62100 \Leftrightarrow y = 207 - \frac{7}{15}x$$

Diesen Wert kann man für y in (2) einsetzen und erhält:

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.



Fit in Mathe

Musterlösungen

Dezember

Klassenstufe 9

$$\begin{aligned}x^2 + \left(207 - \frac{7}{15}x\right)^2 + 40x + 100 \cdot \left(207 - \frac{7}{15}x\right) &= 59600 \\ \Leftrightarrow x^2 + 207^2 - \frac{2898}{15}x + \frac{49}{225}x^2 + 40x + 20700 - \frac{700}{15}x &= 59600 \\ \Leftrightarrow \frac{274}{225}x^2 - \frac{2998}{15}x + 3949 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - \frac{22585}{137}x + \frac{888525}{274} &= 0\end{aligned}$$

Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind:

$$\begin{aligned}x_{1/2} &= \frac{22585}{274} \pm \sqrt{\left(\frac{22585}{274}\right)^2 - \frac{888525}{274}} = \frac{22585}{274} \pm \frac{5 \cdot \sqrt{4517^2 - 35541 \cdot 274}}{274} \\ &= \frac{22585}{274} \pm \frac{5 \sqrt{10665055}}{274} \\ \Rightarrow x_1 &\approx 142,02 \quad \text{und} \quad x_2 \approx 22,83\end{aligned}$$

Die zugehörigen y-Werte ergeben sich aus obiger Gleichung für y als

$$y_1 \approx 207 - \frac{7}{15} \cdot 142,02 \approx 140,72 \quad \text{und} \quad y_2 \approx 207 - \frac{7}{15} \cdot 22,83 \approx 196,35$$

Es gibt auf Basis dieser Messung zwei mathematisch mögliche Positionen (siehe auch die Zeichnung). Um herauszufinden, welches die richtige Position ist, muss eine entweder als ortungstechnisch unmöglich bewertet werden können (auf Grund vorheriger Positionsbestimmungen zu weit weg, unzugänglich o.ä.) oder es muss eine Entfernungsmessung zu einem dritten festen Punkt durchgeführt werden. Bei GPS handelt es sich beim Signal natürlich um elektromagnetische Wellen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit (ca. 300 000 km/s) im dreidimensionalen Raum ausbreiten und die Sender sind ortsfest stehende Satelliten. Statt der Kreise (den sogenannte Standlinien) wie in der Aufgabe geht es dabei um Kugeloberflächen. Die Entfernungsmessung über die Signallaufzeit setzt voraus, dass die Uhren von Sender und Empfänger absolut synchron laufen und sehr genau gehen. Ein Zeitfehler von einer μs (= 1 Mikrosekunde = 10^{-6} s) bedeutet schon eine Abweichung von 300 m.

Hier nehmen wir an, dass der Punkt $P_1(142,02|140,72)$ der Ortungspunkt ist.

Die zweite Messung führt analog auf die Gleichungen

$$\begin{aligned}(50 - x)^2 + (100 - y)^2 &= 150^2 \\ (3) \quad \Leftrightarrow 2500 - 100x + x^2 + 10000 - 200y + y^2 &= 22500 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 100x - 200y &= 10000\end{aligned}$$

In gleicher Weise ergibt sich für den Abstand r_2 zu S_2 :

$$\begin{aligned}(-20 - x)^2 + (-50 - y)^2 &= 200^2 \\ (4) \quad \Leftrightarrow 400 + 40x + x^2 + 2500 + 100y + y^2 &= 40000 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 40x + 100y &= 37100\end{aligned}$$

Durch Subtraktion wie oben von (3) und (4) erhält man die Gleichung:

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.



Fit in Mathe

Musterlösungen

Dezember

Klassenstufe 9

$$-140x - 300y = -27100 \Leftrightarrow y = \frac{271}{3} - \frac{7}{15}x$$

Diesen Wert kann man für y in (4) einsetzen und erhält:

$$\begin{aligned}x^2 + \left(\frac{271}{3} - \frac{7}{15}x\right)^2 + 40x + 100 \cdot \left(\frac{271}{3} - \frac{7}{15}x\right) &= 37100 \\ \Leftrightarrow x^2 + \frac{271^2}{9} - \frac{3794}{45}x + \frac{49}{225}x^2 + 40x + \frac{27100}{3} - \frac{140}{3}x &= 37100 \\ \Leftrightarrow \frac{274}{225}x^2 - \frac{4094}{45}x - \frac{179159}{9} &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - \frac{20470}{274}x - \frac{4478975}{274} &= 0\end{aligned}$$

Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind:

$$\begin{aligned}x_{1/2} &= \frac{10235}{274} \pm \sqrt{\left(\frac{10235}{274}\right)^2 + \frac{4478975}{274}} \\ &= \frac{10235}{274} \pm 5 \cdot \sqrt{\left(\frac{2047}{274}\right)^2 + \frac{179159}{274}} = \frac{10235}{274} \pm \frac{5 \cdot \sqrt{53279775}}{274} \\ &\Rightarrow x_1 \approx 170,55 \quad \text{und} \quad x_2 \approx -95,84\end{aligned}$$

Die zugehörigen y -Werte ergeben sich aus obiger Gleichung für y als

$$y_1 \approx \frac{271}{3} - \frac{7}{15} \cdot 170,55 \approx 10,74 \quad \text{und} \quad y_2 \approx \frac{271}{3} - \frac{7}{15} \cdot (-95,84) \approx 135,06$$

Wie bei der 1. Messung soll aus ortungstechnischen Gründen der 2. Punkt $P_2(170,55 | 10,74)$ der richtige sein (siehe Zeichnung).

Die Funktionsgleichung der Geraden, auf der man sich bewegt, kann dann mit der Zwei-Punkte-Formel bestimmt werden:

$$\begin{aligned}\frac{y - y_1}{x - x_1} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow \frac{y - 140,72}{x - 142,02} = \frac{10,74 - 140,72}{170,55 - 142,02} \\ &\Leftrightarrow \frac{y - 140,72}{x - 142,02} = -4,56 \\ &\Leftrightarrow y = -4,56x + 788,33\end{aligned}$$

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.