Fit in Mathe

Musterlösungen 1

Februar Klassenstufe 10

Thema **Nichtlineare Gleichungssysteme**

❶ Gegeben sind eine Gerade mit $y=\frac{1}{2}x+5$ und eine Parabel mit $y=x^2+\frac{3}{2}x-1$.
Bestimme die Schnittpunkte – falls vorhanden!

Lösung

In den Schnittpunkten gilt: $\frac{1}{2}x+5=x^2+\frac{3}{2}x-1$. Das führt auf die quadratische Gleichung $x^2+x-6=0$ mit den Lösungen $x_1=2$ und $x_2=-3$. Durch Einsetzen in eine der obigen Funktionsgleichungen erhält man die zugehörigen y-Koordinaten und somit $S_1(2/6)$ und $S_2(-3/3{,}5)$.

Die Fläche des achsenparallelen Rechtecks, das von den 2 Punkten aufgespannt wird, ist 12,5, also Buchstabenpaar TR.

❷ Bestimme den Berührpunkt einer Geraden mit der Steigung $\frac{1}{2}$ und der Parabel aus Aufgabe1! (Hinweis: „Berühren“ bedeutet hier, genau einen gemeinsamen Punkt haben.)

Lösung

Wir setzen an $\frac{1}{2}x+b=x^2+\frac{3}{2}x-1$. Das führt auf die quadratische Gleichung $0=x^2+x-(1+b)$. Die Lösungen sind $x_{1/2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+(1+b)}$, und es gibt genau eine Lösung, wenn der Term unter dem Wurzelzeichen 0 ist, d.h. wenn $\left(\frac{1}{2}\right)^2+(1+b)=0$. Das ist der Fall für $b=-\frac{5}{4}$. Dann ist der einzige gemeinsame Punkt $S\left(-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$.

Das Verhältnis $\frac{y}{x}$ der Koordinaten dieses Punktes ist 3, also Buchstabenpaar AI.

❸ Gegeben ist ein Kreis durch $x^2+y^2=25$.
Überprüfe, ob die Gerade aus Aufg.1 Schnittpunkte mit dem Kreis hat und ermittle diese ggf.!

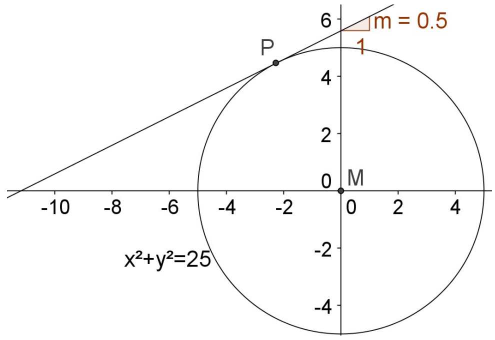
Lösung

Für Schnittpunkte gilt $x^2+\left(\frac{1}{2}x+5\right)^2=25$. Das führt auf die quadratische Gleichung $x^2+4x=0$ mit den Lösungen $x_1=0$ und $x_2=-4$. Die zugehörigen Schnittpunkt sind dann $S_1(0/5)$ und $S_2(-4/3)$.

Die Fläche des achsenparallelen Rechtecks, das von den 2 Punkten aufgespannt wird, ist 8, also Buchstabenpaar NI.

❹ Ermittle die Gerade mit der Steigung $\frac{1}{2}$ und positivem y-Achsenabschnitt, die nur einen gemeinsamen Punkt mit dem Kreis hat.
Berechne die Koordinaten x und y des gemeinsamen Punktes P.

.

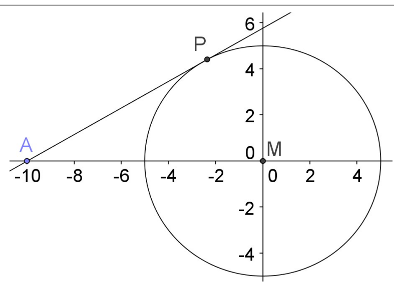


Lösung

Der Ansatz ist $x^2+(\frac{1}{2}x+b)^2=25$ und daraus wird umgeformt in die Normalform $x^2+\frac{4}{5}xb+(\frac{4}{5}b^2-20)=0$. Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind $x_{1/2}=-\frac{2}{5}b\pm\sqrt{(\frac{2}{5}b)^2-(\frac{4}{5}b^2-20)}$. Soll es nur eine Lösung geben, muss der Term unter der Wurzel 0 werden, d.h. $b=\frac{5}{2}\sqrt{5}$, denn der positive y-Achsenabschnitt war gesucht. Hieraus kann man die x-Koordinate des Schnittpunktes ermitteln als $x_S=-\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{2}\sqrt{5}=-\sqrt{5}$ und die zugehörige y-Koordinate ergibt sich durch Einsetzen in die Geradengleichung als $y_S=\frac{1}{2}\cdot(-\sqrt{5})+\frac{5}{2}\cdot\sqrt{5}=2\sqrt{5}$.

Der Betrag des Verhältnisses $\frac{y}{x}$ ist 2, also Buchstabenpaar NG.

❺ Eine Gerade soll die x-Achse bei $x_0=-10$ schneiden.
Bestimme die Gerade, die den Kreis (wie oben) im Punkt P berührt!
Berechne die x-Koordinate von P!



Lösung

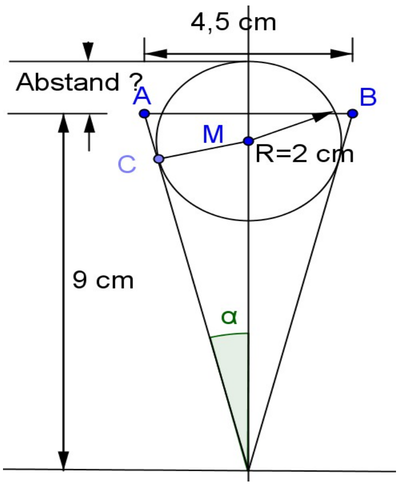
Damit die Steigungs- und Nullstellenbedingung erfüllt ist, kann die Gerade als $y=m(x+10)$ angesetzt werden. Für die x-Koordinate des Punktes P muss $x^2+(m(x+10))^2=25$ gelten, umgeformt in die Normalform ergibt dies

$x^2+\frac{20m^2}{1+m^2}x+\frac{100m^2-25}{1+m^2}=0$. Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind $x_{1/2}=-\frac{10m^2}{1+m^2}\pm\sqrt{(\frac{10m^2}{1+m^2})^2-\frac{100m^2-25}{1+m^2}}$ und es gibt nur dann genau eine, wenn der Term unter der Wurzel 0 wird, d.h. nach entsprechenden Umformungen $m^2=\frac{1}{3}$.

Gesucht ist die positive Lösung $m=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Die x-Koordinate ergibt sich durch Einsetzen als $x_P=-\frac{5}{2}$ und wenn man diesen Wert in die Geradengleichung $y=\frac{1}{\sqrt{3}}(x+10)$ einsetzt, erhält man $y_P=\frac{15}{2\sqrt{3}}$.

Der Betrag der x-Koordinate ist 2,5, also Buchstabenpaar SA.

❻ Eine Eiskugel mit Radius 2 cm befindet sich in einer kegelförmigen Eistüte, die eine Höhe von 9 cm und eine Breite von 4,5 cm hat.
Wieviel cm ragt die Kugel über den Rand der Eistüte?



Lösung
Es sei x der gesuchte Abstand. Dann ist der Abstand von der Spitze unten zum Kreismittelpunkt $9+x-2=7+x$. C sei der Berührpunkt des Kugelquerschnitts mit der Innenwand der Tüte, dann steht $\overline{CM}$ senkrecht auf der Innenwand und hat die Länge R=2, also gilt: $\frac{2}{7+x}=\sin(\alpha)$. Außerdem ist $\tan(\alpha)=\frac{2{,}25}{9}=\frac{1}{4}$ .Wegen $\cos(\alpha)=\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}$ gilt schließlich

$$\frac{1}{4}=\tan(\alpha)=\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}=\frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}}=\frac{\frac{2}{7+x}}{\sqrt{1-(\frac{2}{7+x})^2}}$$

, woraus man nach Umformungen erhält: $68=(7+x)^2$. Diese quadratische Gleichung hat die beiden Lösungen

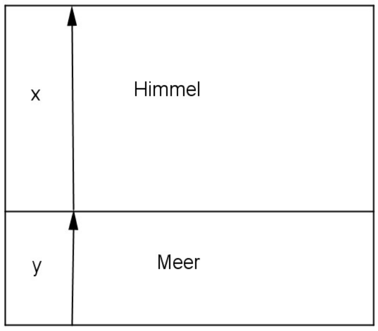
$x_{1/2}=\pm\sqrt{68}-7=\pm 2\sqrt{17}-7$, wobei hier nur die positive als Lösung für das gesuchte x in Frage kommt.
Da $4{,}1<\sqrt{17}<4{,}2$ ist, folgt hieraus $1{,}2<2\sqrt{17}-7<1{,}4$,

also ist x auf ganze cm gerundet 1, d.h.Buchstabenpaar NZ.

❼ Ein Maler möchte auf einer 1,20 m hohen Leinwand Meer und Himmel darstellen. Die Aufteilung der Flächen soll den Gesetzen des goldenen Schnitts genügen, d.h.

$$\frac{Fläche(Meer)}{Fläche(Himmel)}=\frac{Fläche(Himmel)}{Gesamtfläche\ Bild}$$

In welcher Höhe sieht er die Horizontlinie vor, d.h. y = ?



<u>Lösung</u>

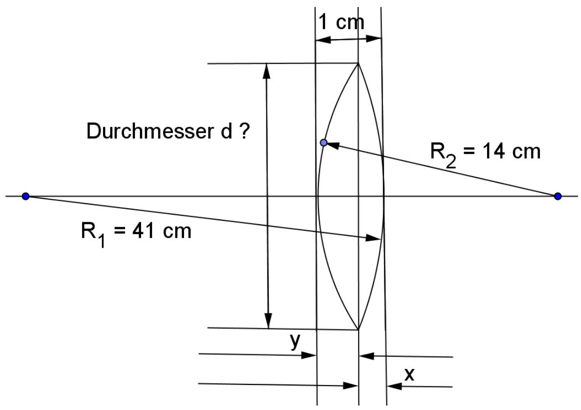
Nimmt man die Gesamthöhe in dm, so gelten die Beziehungen $\frac{x}{y}=\frac{12}{x}$ und $x+y=12$. Aus beiden Gleichungen ergibt sich $x^2=12\cdot y=12\cdot(12-x)$, in der Normalform $x^2+12x-144=0$. Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind $x_{1/2}=-6\pm\sqrt{6^2+144}$. Nur die positive Lösung macht Sinn, d.h. $x_1=-6+\sqrt{180}$.
Wegen $13{,}4<\sqrt{180}<13{,}5$ gilt für x_1 $7{,}4<-6+\sqrt{180}<7{,}5$

und das ganzzahlig gerundete y ist 5 dm hoch, also Buchstabenpaar UG

Lösungen mit Kennsilben													
4	12,5	0	5	8	13,5	2,4	3	7	2,5	6	2	9	1
ND	TR	HO	UG	NI	BU	EN	AI	FA	SA	SE	NG	LT	NZ

Lösungswort:TRAININGSANZUG

❽ <u>Expertenaufgabe</u>
Eine konvexe Linse hat zu einer Seite einen Wölbungsradius von 14 cm und zur anderen einen von 41 cm. In der Mitte ist sie 1 cm dick.
Welchen Durchmesser hat die Linse ?



Lösung

Mit den Bezeichnungen wie in der Zeichnung kann man folgendes Gleichungs-system aufstellen:

(i) $x+y=1$

(ii) $41^2-(41-x)^2=(\frac{d}{2})^2$

(iii) $14^2-(14-y)^2=(\frac{d}{2})^2$

Die Subtraktion von (ii) und (iii) liefert:

$82y-28y-(x^2-y^2)=0$ oder $82x-28y-(x-y)(x+y)=0$.

Setzt man (i) ein, so erhält man die Gleichung

$81x-27y=0$ oder $3x-y=0$.

Diese letzte Gleichung zusammen mit (i) hat die Lösungen

$x=\frac{1}{4}$ und $y=\frac{3}{4}$.·

Setzt man nun y in (iii) ein, so erhält man:

$14^2-(14-\frac{3}{4})=28\cdot\frac{3}{4}-(\frac{3}{4})^2=21-\frac{9}{16}=\frac{327}{16}=(\frac{d}{2})^2$

Hieraus folgt: $d=\frac{\sqrt{327}}{2}$ und da $\sqrt{327}\approx\sqrt{324}=18$ ist, folgt $d\approx 9$ cm.