Thema

Winkel in der Linearen Algebra
(Taschenrechner erlaubt)

❶ Ermittle zeichnerisch mit Hilfe nebenstehender Tabelle, welche Winkel α ($0° \leq \alpha < 360°$) erster und zweiter Vektor bei positivem Drehsinn einschließen:

a) $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$

b) $\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{6}-\sqrt{2}\\\sqrt{6}+\sqrt{2}\end{pmatrix}$ und $\sqrt{2}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$

<u>Tabelle mit Kosinuswerten</u>

* $\cos(0°) = 1$
* $\cos(15°) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
* $\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
* $\cos(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$
* $\cos(60°) = \frac{1}{2}$
* $\cos(75°) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
* $\cos(90°) = 0$

<u>Lösung</u>

Aus den angegebenen Werten ermitteln wir zunächst, welchen Winkel die Vektoren mit der x-Achse einschließen. In der Tabelle sind nur die cos-Werte angegeben, aber man kann über die Beziehung $\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha) = 1$ den zum selben Winkel gehöri-gen sin-Wert bestimmen.

zu a) Die 1. Komponente des 2.Vektors ist $\cos(60°)$ und wegen

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$$

ist die 2.Komponente $\sin(60°)$.

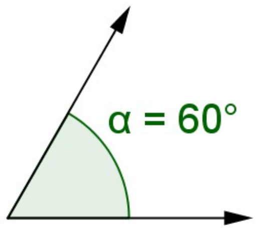
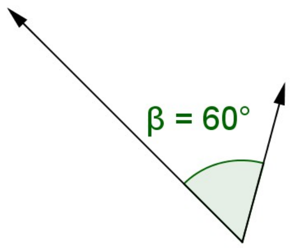
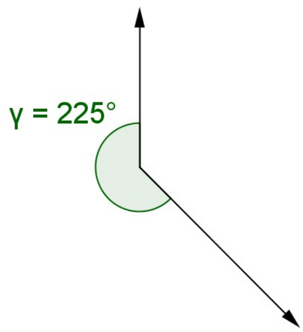
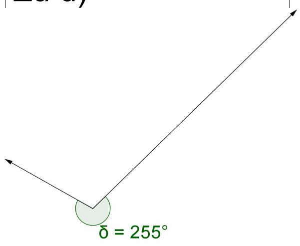
Zu b) Die 1. Komponente des 1.Vektors ist $\cos(75°)$ und wegen

$\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 = 1$ ist die 2.Komponente $\sin(75°)$.

zu d) Schreibt man für den ersten Vektor $2\cdot\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, so entspricht dies einem

Vektor $2\cdot\begin{pmatrix}\cos(120°)\\\sin(120°)\end{pmatrix}$.

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.

zu a)	Zu b)	Zu c)	Zu d)
			

Die Summe aller Winkel ist 600, also Buchstabenpaar EI.

❷ Ermittle die Winkel zwischen den Vektoren der 1. Aufgabe mit Hilfe des Skalarproduktes.

<u>*Lösung*</u>
Für den Kosinus des von zwei Vektoren eingeschlossenen Winkels gilt unter Nutzung des Skalarproduktes $\cos(\alpha) = \dfrac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$. Wenn man für den Winkel vorgibt:
$0° \leq \alpha < 360°$, so kann er aus dem Kosinus wegen $\cos(\alpha) = \cos(360° - \alpha)$ nicht eindeutig abgeleitet werden. Man erhält immer zwei mögliche Winkel im Intervall, den gesuchten und den Komplementärwinkel und muss noch durch andere Überlegungen den richtigen auswählen. Wenn der Drehsinn der Vektoren keine Rolle spielt, nimmt man den kleineren Winkel im Intervall $0° \leq \alpha < 180°$, was wir hier tun wollen.

zu 1a) $(\vec{a}\cdot\vec{b}) = 1\cdot\frac{1}{2} + 0\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3} = \frac{1}{2}$, $|\vec{a}| = 1$ und $|\vec{b}| = 1$, also $\cos(\alpha) = 0{,}5$.
d.h. $\alpha = 60°$.

zu 1b) $(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \frac{1}{4}\cdot(\sqrt{6} - \sqrt{2})\cdot(-\sqrt{2}) + \frac{1}{4}\cdot(\sqrt{6} + \sqrt{2})\cdot\sqrt{2} = 1$, $|\vec{a}| = 1$ und $|\vec{b}| = 2$
(siehe oben Aufgabe 1b), also $\cos(\alpha) = 0{,}5$, d.h. $\alpha = 60°$

zu 1c) $(\vec{a}\cdot\vec{b}) = 0\cdot 1 + 1\cdot(-1) = -1$, $|\vec{a}| = 1$ und $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, also $\cos(\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$,
d.h. $\alpha = 135°$.

zu 1d) $(\vec{a}\cdot\vec{b}) = -\sqrt{3}\cdot 4 + 1\cdot 4 = (1 - \sqrt{3})\cdot 4$, $|\vec{a}| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1} = \sqrt{4} = 2$ und
$|\vec{b}| = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\cdot\sqrt{2}$, also $\cos(\alpha) = \dfrac{1 - \sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$, d.h. $\alpha = 105°$

Die Summe aller Vektorlängen $(1+1+1+2+1+\sqrt{2}+2+4\sqrt{2})$ *ist ganzzahlig gerundet 15, also Buchstabenpaar SS.*

❸ Welchen Winkel α ($0° \le \alpha < 180°$) schließen die folgenden Vektorpaare ein:

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \sqrt{6}-\sqrt{2} \\ \sqrt{6}+\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -3 \\ -\sqrt{3} \\ -2 \end{pmatrix}$

<u>Lösung</u>

Wie bereits oben festgestellt verstehen wir unter dem eingeschlossenen Winkel α ohne Rücksicht auf den Drehsinn den mit $0° \le \alpha < 180°$. Der erste Vektor sei $\vec{a}$ und der zweite $\vec{b}$

zu a)

$(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\sqrt{6}-\sqrt{2})+\sqrt{3}\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{2}) = 2\cdot\sqrt{6}+2\cdot\sqrt{2}$, $|\vec{a}| = \sqrt{1+(\sqrt{3})^2+0} = 2$,

$|\vec{b}| = \sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2+(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2} = 4$, also $\cos(\alpha) = \dfrac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \dfrac{2(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2\cdot 4}$,

d.h. $\alpha = 15°$.

zu b)

$(\vec{a}\cdot\vec{b}) = -\sqrt{3}-3\cdot\sqrt{3}+4\sqrt{3} = 0$. Damit ist der eingeschlossene Winkel $\alpha = 90°$.

zu c)

$(\vec{a}\cdot\vec{b}) = -3\cdot\sqrt{3}-\sqrt{3}-4\sqrt{3} = -8\sqrt{3}$, $|\vec{a}| = \sqrt{(\sqrt{3})^2+1+(2\sqrt{3})^2} = \sqrt{3+1+12} = 4$,

$|\vec{b}| = \sqrt{(-3)^2+(-\sqrt{3})^2+(-2)^2} = \sqrt{9+3+4} = 4$, also $\cos(\alpha) = \dfrac{-8\cdot\sqrt{3}}{16} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

d.h. $\alpha = 150°$

Die Summe aller eingeschlossenen Winkel ist 255, also Buchstabenpaar CH.

❹ Bei einer Straßenbaumaßnahme kreuzen sich zwei geradlinige Straßen auf einer Anhöhe im Schnittpunkt $A(0|5|3)$. Ein weiterer Punkt der einen Straße ist $B(-3|1|2)$, ein weiterer Punkt der anderen Straße ist $C(2|-1|0)$.
Welchen Schnittwinkel schließen die beiden Straßen ein?

<u>Lösung</u>

Gesucht ist der Schnittwinkel im (Landschafts-) Raum der beiden Richtungsvektoren, die zur jeweiligen Gerade bzw. Straße gehören. Die Richtungsvektoren sind

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$

Für den Schnittwinkel α der beiden Richtungsvektoren berechnet man das

Skalarprodukt $\cos(\alpha) = \frac{(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}$ und erhält mit $(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}) = -6+24+3 = 21$,

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9+16+1} = \sqrt{26}$ und $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4+36+9} = \sqrt{49} = 7$: $\cos(\alpha) = \frac{3}{\sqrt{26}}$

und daraus $\alpha = \cos^{-1}(\frac{3}{\sqrt{26}}) \approx 53{,}96°$.

Der Winkel in Grad und ganzzahlig gerundet ist 54, also Buchstabenpaar NE.

❺ Zwei gerade Eisenbahnlinien verlaufen in einer waagerechten (!) Ebene aufeinander zu und sollen sich in einer weiter nördlich gelegenen Stadt mit einem Eisenbahn-knotenpunkt unter einem Winkel α=60° schneiden. Der Richtungsvektor der einen

Eisenbahnstrecke ist mit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ bauplanerisch festgelegt.

Wie lautet ein passender Richtungsvektor $\vec{v}$ der anderen Eisenbahnstrecke ?

<u>Lösung</u>

Eine wesentliche Information ist die „waagerechte Ebene“ (was übrigens in der Praxis bei Eisenbahnknoten aus technischen Gründen immer erfüllt sein muss),

d.h., der gesuchte Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ muss mit $\vec{u}$ die z-Komponente gemeinsam haben. Da es sich um ein Problem in einer waagerechten Ebene mit z-Komponente 0 handelt, kann man zweidimensionale Vektoren ansetzen.

Es sei α der Winkel, den der gegebene Richtungsvektor mit der x-Achse

einschließt. Für diesen gilt: $\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{3}{5}$, woraus sich ergibt

$\alpha = \cos^{-1}(\frac{3}{5}) \approx 53{,}13°$. Wegen $\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha) = 1$ folgt daraus:

$\sin(\alpha) = \sqrt{1-\cos^2(\alpha)} = \sqrt{1-0{,}6^2} = 0{,}8$.

Der Winkel, den der gesuchte Richtungsvektor mit der x-Achse einschließt, ist

demnach $\alpha+60°$, also ist der Vektor selbst $\begin{pmatrix} \cos(\alpha+60°) \\ \sin(\alpha+60°) \end{pmatrix}$.

Nach den Additionstheoremen ist aber:

$$\cos(\alpha+60°) = \cos(\alpha)\cdot\cos(60°) - \sin(\alpha)\cdot\sin(60) = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2} - \frac{4}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3-4\sqrt{3}}{10} \approx -0.393$$

und

$$\sin(\alpha+60°) = \sin(\alpha)\cdot\cos(60°) + \cos(\alpha)\cdot\sin(60) = \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4+3\sqrt{3}}{10} \approx 0.92$$

Also ist der gesuchte Richtungsvektor mit der Länge 1:

$$\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix}3-4\sqrt{3}\\4+3\sqrt{3}\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}-0{,}393\\0{,}92\end{pmatrix}$$

Der Winkel (ganzzahlig gerundet in Grad), den er mit der x-Achse einschließt, ist 113°, also Buchstaben LL.

❻ In einer Diskothek fällt der Laserstrahl einer Lichtshow auf einen ebenen Spiegel an der (waagerechten) Decke. Der Laserstrahl kann dabei durch die Gerade $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$ beschrieben werden. Welchen Winkel schließen der Laserstrahl und der Spiegel ein?

Hinweis: Überlege, welche Lage die Ebene (hier der Spiegel an einer Raumdecke) hat und was dies für ihren Normalenvektor bedeutet.

<u>*Lösung*</u>

Der Spiegel als waagerechte Ebene im Raum hat den Normalenvektor

$\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ oder auch $\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$.

Wäre seine x- bzw. y-Komponente von Null verschieden, wäre der Spiegel nicht waagerecht angebracht. Den Richtungsvektor $\vec{v}=\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$ des Laserstrahls liest man aus der obigen Geradengleichung ab.

Für den Winkel α, den der Laserstrahl (Gerade) und der Spiegel (Ebene) einschließen (dem entspricht ein Winkel von $90-\alpha$ des Strahls mit dem Normalenvektor) , gilt der Zusammenhang:

$$\cos(90-\alpha)=\frac{\vec{v}\cdot\vec{n}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{(-2)^2+1+2^2}\cdot\sqrt{0+0+1}}=\frac{2}{3}\,.$$

Damit ergibt sich für den gesuchten Winkel

$$90-\alpha=\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\approx 48{,}19\,° \quad\Rightarrow\quad \alpha\approx 41{,}81\,°\,.$$

Der gesuchte Winkel in Grad und ganzzahlig gerundet ist 42, also Buchstabenpaar LA.

❼ Eine Photovoltaikanlage auf dem Dach eines Hauses kann als Ebene in der Koordinatengleichung E: -3x-3y+5z=0 beschrieben werden. In der Mittagszeit zum besten Jahreszeitpunkt kann der Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ für die günstigste Sonneneinstrahlung angegeben werden. Der größte Wirkungsgrad einer Photo-voltaikanlage wird dann erzielt, wenn die Sonneneinstrahlung möglichst senkrecht zur Photovoltaikanlage erfolgt. Prüfen Sie, ob dies zumindest annähernd erreicht wird.

Lösung
Für die Prüfung ist es erforderlich, den Winkel zwischen dem Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ der günstigsten Sonneneinstrahlung und der Ebene (hier Photovoltaikanlage) zu bestimmen. Dazu ist zunächst der Normalenvektor der Ebene zu ermitteln, der sich unmittelbar aus der Koordinatengleichung ablesen lässt: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, denn man kann die Koordinatengleichung als Skalarprodukt eines beliebigen Vektors in der Ebene $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und eines Vektors, der sich aus den Koeffizienten der Koordinatengleichung ergibt, hier $\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, auffassen. Das Skalar-produkt, d.i. die Koordinatengleichung, ist 0, also handelt es sich bei dem Koeffi-zientenvektor um einen senkrecht auf der Ebene stehenden Vektor. Für den Winkel α zwischen einer Geraden bzw. ihrem Richtungsvektor und einer Ebene gilt der Zusammenhang (siehe Aufgabe 6):

$$\cos(90-\alpha) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{n}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{n}|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}}{\sqrt{2^2+5^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+(-3)^2+5^2}} = \frac{41}{\sqrt{45}\cdot\sqrt{43}}$$

Daraus ergibt sich für $90-\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{41}{\sqrt{45\cdot 43}}\right) \approx 21{,}24\,° \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 68{,}76\,°$.

D. h., der Winkel zwischen der günstigsten Sonneneinstrahlung (Gerade) und der Photovoltaikanlage (Ebene) weicht deutlich von einer senkrechten (optimalen) Ein-strahlung (α=90°) ab, ist jedoch in unseren Breitengraden aufgrund der geographi-schen Lage Deutschlands ein nicht unüblicher Wert.

Die Abweichung von 90° ist ganzzahlig gerundet 24 %, also Buchstabenpaar UF.

Lösungen mit Kennsilben													
15 SS	115 SL	42 LA	600 EI	26 OM	54 NE	44 AL	340 PA	24 UF	270 LL	113 LL	18 RA	255 CH	55 EL
Lösungswort: EISSCHNELLLAUF													

❽ (Expertenaufgabe)

Gegeben seien die Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}\,' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Beide sind gleich lang.

Finde einen Vektor $\vec{n}$ der Länge 1, der in Richtung einer Rotationsachse weist, um die man $\vec{v}$ auf $\vec{v}\,'$ drehen kann. Gib den Winkel an, um den man drehen muss und finde eine 3x3-Matrix R mit der Eigenschaft $R \cdot \vec{v} = \vec{v}\,'$, die jeden anderen Vektor um denselben Winkel um die obige Rotationsachse $\vec{n}$ dreht.

Lösung

Die Rotationsachse steht senkrecht auf dem Vektor, der gedreht werden soll und dem, der das Ergebnis der Drehung darstellt, somit senkrecht auf der von beiden Vektoren aufgespannten Ebene $E(\vec{v}, \overrightarrow{v'})$.

Ein Richtungsvektor der Rotationsachse $\hat{m} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ muss also die Eigenschaften haben: $\hat{m} \cdot \vec{v} = 0$ und $\hat{m} \cdot \overrightarrow{v'} = 0$ und zudem ist die Länge 1 gefordert. Das führt auf das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcl} (i) & 3x & = & 0 \\ (ii) & x+2y+2z & = & 0 \\ (iii) & x^2+y^2+z^2 & = & 1 \end{array}$$

woraus sich zwei Lösungen ergeben: $\widehat{m_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ oder $\widehat{m_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Der Winkel, um den gedreht wird, ergibt sich aus dem Skalarprodukt:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 = 3 \cdot 3 \cdot \cos(\alpha) \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{1}{3}$$

woraus folgt: $\alpha_1 \approx 70{,}53°$ oder $\alpha_2 \approx 289{,}47°$.

Eine Drehung in einem positiv orientierten Richtungssinn wird durch die „Rechte-Hand-Regel“ festgelegt, d.h. wenn der Daumen in die Richtung der positiven Rotationsachse zeigt, zeigen die Fingerspitzen in Richtung der positiven Dreh-richtung.

Im vorliegenden Fall gehören bei positivem Drehsinn der Normalenvektor $\widehat{m}_2$ und der Winkel α_1 oder der Normalenvektor $\widehat{m}_1$ und der Winkel α_2 zusammen.
Für die weitere Betrachtung wählen wir den kleineren Winkel.

Wir wollen zwei orthogonale Einheitsvektoren angeben, die die Ebene $E(\vec{v},\vec{v'})$ aufspannen. Dazu konstruieren wir in der Ebene, die von $\vec{v}$ und $\vec{v'}$ aufgespannt wird, einen Vektor $\vec{r}$ durch die Eigenschaft $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\cdot|\vec{v'}|\cdot\cos(\alpha)+\vec{r}=\vec{v'}$,

wobei der erste Summand die Projektion von $\vec{v'}$ auf $\vec{v}$ ist.

d.h. $\vec{r}=\vec{v'}-\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\cdot|\vec{v'}|\cdot\cos(\alpha)$. Dieser Vektor steht senkrecht auf $\vec{v}$, denn

$$\vec{r}\cdot\vec{v}=(\vec{v'}-\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\cdot|\vec{v'}|\cdot\cos(\alpha))\cdot\vec{v}=\vec{v'}\cdot\vec{v}-\frac{\vec{v}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}\cdot|\vec{v'}|\cdot\cos(\alpha)=\vec{v'}\cdot\vec{v}-|\vec{v}|\cdot|\vec{v'}|\cdot\cos(\alpha)=0 \quad .$$

Mit obigen Vorgaben erhalten wir:

$$\vec{r}=\vec{v'}-\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\cdot|\vec{v'}|\cdot\cos(\alpha)=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{3}=\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix} .$$

und der auf 1 normierte Vektor ist $\frac{1}{\sqrt{8}}\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$. $\vec{v}$ auf 1 normiert ist $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

Damit liegt ein System von drei senkrecht aufeinander stehenden Einheitsvektoren

vor, nämlich $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$.

Jeder beliebige Vektor kann als eine Linearkombination dieser drei Vektoren dargestellt werden.
Für das weitere müssen wir wissen, was bei der Drehung mit dem zweiten Einheits-vektor geschieht. Da der gedrehte Vektor wieder in der Ebene $E(\vec{v},\vec{v'})$ liegt, können wir den Ansatz machen:

$$\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+y\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Er muss senkrecht auf $\vec{v'}$ stehen, was auf die Gleichung führt:

$$0=(\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+y\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix})\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=y+\frac{4x}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow y=-\frac{4x}{\sqrt{2}}$$

und

$$\cos(90+\alpha)=-\sin(\alpha)=(\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\begin{matrix}0\\1\\1\end{matrix}+y\cdot\begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix})\cdot\begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix}=y \Leftrightarrow y=-\sin(\alpha)=-\sqrt{1-(\frac{1}{3})^2}=-2$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich für den gedrehten 2. Einheitsvektor

$$\frac{1}{3\cdot\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix}-4\\1\\1\end{pmatrix} .$$

Die Drehung des 3. Einheitsvektors führt zu keiner Veränderung, weil er Richtungs-vektor in der Rotationsachse ist.
Für die Rotationsmatrix R gilt nun:

(i) $\begin{pmatrix}r_{11} & r_{12} & r_{13}\\ r_{21} & r_{22} & r_{23}\\ r_{31} & r_{32} & r_{33}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$

Daraus ergeben sich: $r_{11}=\frac{1}{3}$, $r_{21}=\frac{2}{3}$ und $r_{31}=\frac{2}{3}$.

Für den 3.Einheitsvektor haben wir

(ii) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & r_{12} & r_{13} \\ \frac{2}{3} & r_{22} & r_{23} \\ \frac{2}{3} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

woraus sich ergibt: $-r_{12}+r_{13}=0$, $-r_{22}+r_{23}=-1$ und $-r_{32}+r_{33}=1$

(iii) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & r_{12} & r_{13} \\ \frac{2}{3} & r_{22} & r_{23} \\ \frac{2}{3} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

woraus sich ergibt: $r_{12}+r_{13}=-\frac{4}{3}$, $r_{22}+r_{23}=\frac{1}{3}$ und $r_{32}+r_{33}=\frac{1}{3}$

Wir haben ein Gleichungssystem mit folgenden Gleichungen:

$$\begin{array}{lllcl}
-r_{12}+r_{13} & & & = & 0 \\
 & -r_{22}+r_{23} & & = & -1 \\
 & & -r_{32}+r_{33} & = & 1 \\
r_{12}+r_{13} & & & = & -\frac{4}{3} \\
 & r_{22}+r_{23} & & = & \frac{1}{3} \\
 & & r_{32}+r_{33} & = & \frac{1}{3}
\end{array}$$

woraus man leicht ersehen kann

$r_{13}=-\frac{2}{3}$, $r_{12}=-\frac{2}{3}$, $r_{23}=-\frac{1}{3}$, $r_{22}=\frac{2}{3}$, $r_{33}=\frac{2}{3}$, $r_{32}=-\frac{1}{3}$

Die Rotationsmatrix hat also das Aussehen:

$$R=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$