Fit in Mathe

Musterlösungen 1

Februar Klassenstufe 9

Thema **Reelle Zahlen**

❶ Berechne

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}:\frac{1}{2}+\frac{1}{-2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{-1}{4}:\frac{1}{2} =$$

<u>Lösung</u>

$$= \frac{1}{8}+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{2} = 0 \ .$$

Das Ergebnis ist die ganze Zahl 0, also Buchstabenpaar SC.

❷ Vereinfache weitestmöglich

$$\frac{25x^2y-30xy^2}{5x-6y} =$$

<u>Lösung</u>

$$= \frac{5\text{xy}(5x-6y)}{5x-6\text{y}} = 5xy \ .$$

Das Ergebnis ist ein Produkt aus 3 Faktoren, also Buchstabenpaar HE.

❸ Bringe auf einen Bruchstrich und kürze soweit möglich

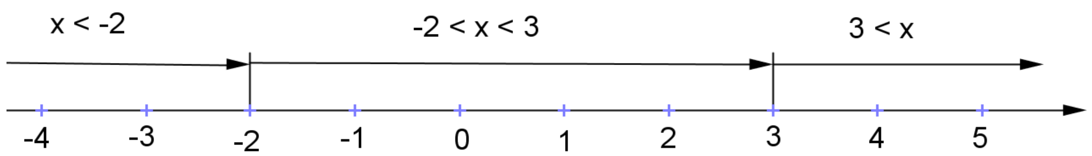
$$\frac{\frac{6a}{a^2-b^2}}{\frac{3a}{a+b}} =$$

<u>Lösung</u>

$$= \frac{6\text{a}(a+b)}{3\text{a}(a+b)(a-b)} = \frac{2}{a-b} \ .$$

Im Ergebnis erscheinen noch 2 Buchstaben, also Buchstabenpaar IB.

❹



Welches Vorzeichen hat der Term $(x+2)(x-3)$ für die dargestellten Intervalle?

<u>Lösung</u>

Das Vorzeichen ist nur im mittleren Intervall negativ, d.h. in 1 Intervall, also Buchstabenpaar EN.

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.

hochschule 21 genial dual PFH PRIVATE UNIVERSITY of Applied Sciences TUHH Technische Universität Hamburg-Harburg

Fit in Mathe

Musterlösungen

Februar Klassenstufe 9

❺ Ergänze folgende Tabelle

Bruch	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{2}$	--
Dezimalbruch	$0,\overline{3}$	$0,\overline{1}$	$0,5$	--
Wurzel	$\sqrt{\frac{1}{9}}$	$\sqrt{\frac{1}{81}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$

<u>Lösung</u>

Sinnvolle Ergänzungen sind an den 6 markierten Stellen möglich, also Buchstabenpaar BR.

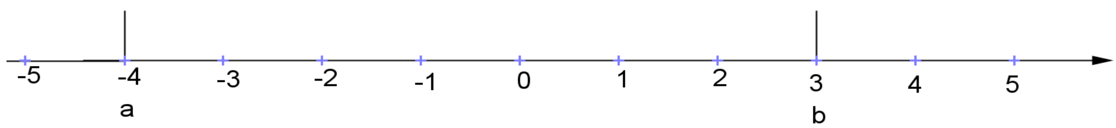
❻ Setze das richtige Relationszeichen „>“,„<“ oder „=“ zwischen die Terme!

a) $2\sqrt{6}$ __ 5 b) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ __ 1 c) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})^2$ __ $(\sqrt{10})^2$

<u>Lösung</u>

In der Lösungszahl steht 1 für „<“, 2 für „>“ und 0 für „=“, also a) 1 b) 0 c) 2, d.h. die Lösungszahl ist 102, also Buchstabenpaar EM.

❼



$|a-b|$ bezeichnet den Abstand zweier Zahlen a und b auf dem Zahlenstrahl, ist also selbst immer eine positive Zahl.

Welchen Wert haben die folgenden Beträge?

a) $|a-b| = 7$ b) $|4-3| = 1$ c) $|-4-(-3)| = 1$ d) $|4-(-3)| = 7$

<u>Lösung</u>

wie oben eingetragen, also ist die Lösungszahl 14, das ist Buchstabenpaar SE.

Lösungen mit Kennsilben

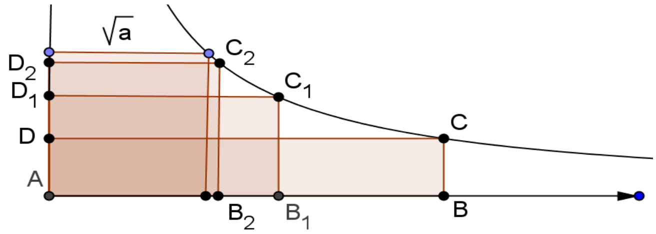
0	102	1	3	5	15	7	103	2	6	8	14	9	15
SC	EM	EN	HE	PA	ER	EC	EG	IB	BR	KT	SE	RA	ER

Lösungswort: SCHEIBENBREMSE

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.

hochschule 21 genial dual PFH PRIVATE UNIVERSITY of Applied Sciences TUHH Technische Universität Hamburg-Harburg

❽



Expertenaufgabe (Heron-Verfahren)
Hierbei geht es um die Bestimmung der Wurzel einer positiven reellen Zahl a , d.h. graphisch: man sucht die Seitenlänge eines Quadrats mit dem Flächeninhalt a .
Starte mit einer Seite $\overline{AB}\,(=x_0)$, die sicher länger als $\sqrt{a}$ ist. Mit der zugehörigen Seite $\overline{CB}\,(=\frac{a}{x_0}=y_0)$ ergibt sich ein Rechteck der Fläche a . Der Mittelwert $x_1=\frac{x_0+y_0}{2}$ $(=\overline{AB_1})$ mit dem zugehörigen $y_1=\frac{a}{x_1}(=\overline{C_1B_1})$ ist eine bessere Näherung an $\sqrt{a}$. Nimm dann den nächsten Mittelwert $x_2=\frac{x_1+y_1}{2}$ mit $y_2=\frac{a}{x_2}$ und fahre so fort.
Die x-Werte nähern sich ziemlich schnell $\sqrt{a}$!
Führe das Verfahren für die Bestimmung von $\sqrt{2}$ mit dem Startwert $x_0=2$ und drei Schritten durch und überprüfe durch Quadrieren die Güte des Resultats!

Lösung

Es ist $x_0=2$ und $y_0=\frac{2}{2}=1$.

Im nächsten Schritt ergibt sich $x_1=\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}$ und $y_1=\frac{2}{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}$.

Dann bekommt man $x_2=\frac{\frac{3}{2}+\frac{4}{3}}{2}=\frac{17}{12}$ und $y_2=\frac{2}{\frac{17}{12}}=\frac{24}{17}$.

Im dritten Schritt schließlich erhält man $x_3=\frac{\frac{17}{12}+\frac{24}{17}}{2}=\frac{577}{408}=1\frac{169}{408}$

und wenn man dies quadriert, ergibt sich $x_3^2=2\frac{1}{166464}$.

Wie groß ist der Fehler noch ?
Alle Näherungen x_i sind größer als $\sqrt{2}$. Also gibt es ein kleines $\varepsilon>0$ mit $(1\frac{169}{408}-\varepsilon)^2=2$ Löst man diese quadratische Gleichung nach ε auf, ergibt sich

(*) $\varepsilon = \frac{577}{408} \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{577^2}}\right)$.

Für ein positives δ, welches kleiner als 1 ist, gilt $\delta < \delta(1+\sqrt{1-\delta})$. Das δ auf der linken Seite dieser Ungleichung kann man gemäß 3. binomischer Formel schreiben als $(1-\sqrt{1-\delta})(1+\sqrt{1-\delta})$, daher ergibt sich aus obiger Ungleichung:
$(1-\sqrt{1-\delta})(1+\sqrt{1-\delta}) < \delta(1+\sqrt{1-\delta})$ und nach Kürzen auf beiden Seiten der Ungleichung durch $(1+\sqrt{1-\delta})$ erhält man: $(1-\sqrt{1-\delta}) < \delta$

Diese Abschätzung wenden wir auf die Gleichung (*) an, indem wir δ durch $\frac{1}{577^2}$ ersetzen und gelangen zu der Abschätzung:

$$\varepsilon < \frac{577}{102} \cdot \frac{1}{577^2} = \frac{1}{102 \cdot 577} = \frac{1}{58854} \approx 1{,}7 \cdot 10^{-5} \quad .$$

Wir treffen also mit $1\frac{169}{408}$ den Wert von $\sqrt{2}$ schon auf mindestens 4 Stellen hinter dem Komma genau und in der Tat ist $1\frac{169}{408} = 1{,}4142156...$, während $\sqrt{2} = 1{,}4142135...$ ist.