Fit in Mathe

Musterlösungen 1

Januar Klassenstufe 11

Thema **Umkehrfunktion**

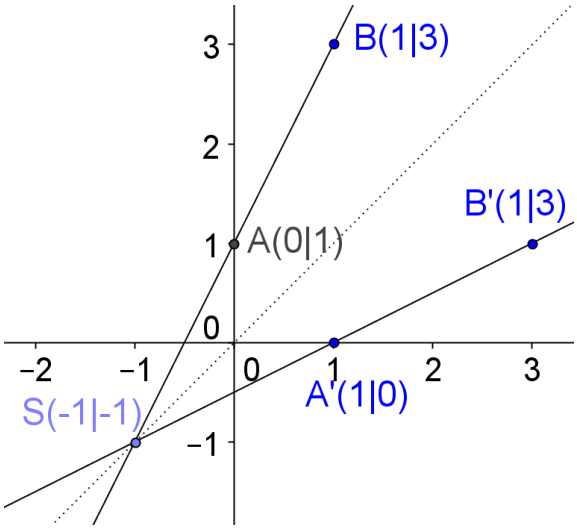
❶ Bestimme zur Funktion f die Umkehrfunktion $\bar{f}$, dargestellt als Tabelle.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	1	3	5	7	9

x	0	1	2	3	4
$\bar{f}(x)$	-0,5	0	0,5	1	1,5

Die Summe der 5 Werte von $\bar{f}(x)$ ist 2,5 also Buchstabenpaar GA.

❷ Stelle die Funktion f und ihre Umkehrfunktion $\bar{f}$ im Koordinatensystem dar.
Spiegele die Punkte A(0|1) und B(1|3) des Graphen von f an der Winkelhalbierenden.
Bestätige, dass A‘ und B‘ auf dem Graphen von $\bar{f}$ liegen.
Gib die Koordinaten des Schnittpunkts der beiden Funktionsgraphen an:
x = ... y = ...



Lösung
In obiger Zeichnung ist der Graph einer linearen Funktion durch die Punkte A und B dargestellt, die den funktionalen Zusammenhang der Wertepaare aus Aufgabe 1 beschreibt. Ebenso verhält es sich bei dem linearen Graphen durch die Punkte A' und B' . Man sieht, dass beide Graphen zueinander spiegelbildlich zur Winkelhalbierenden des ersten Quadranten liegen.

Beide Geraden schneiden sich im Punkt S(-1|-1), also ist die Summe beider Koordinaten des Schnittpunktes -2, also Buchstabenpaar NZ.

❸ Stelle die Gleichung für f in der Form y = m·x+b dar. Löse nach x auf und stelle in der Form x = M·y+B dar. Begründe, dass für die Umkehrfunktion gilt $\bar{f}$ = M·x+B.

Lösung
Die Funktionsgleichung von f ist: $f(x) = 2x+1$. Wenn man $y = 2x+1$ nach y umstellt, erhält man $x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$. Dies ist schon die Umkehrfunktion, in der jedoch

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.

hochschule 21 genial dual · PFH PRIVATE UNIVERSITY of Applied Sciences · TUHH Technische Universität Hamburg-Harburg

die unabhängige Variable mit y und die abhängige mit x bezeichnet ist. Da die Bezeichnung aber standardmäßig anders herum ist, wird die Funktionsgleichung durch ein entsprechendes Umbezeichnen zu $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$, also $\overline{f}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.,

d.h. $M = \frac{1}{2}$ und $B = -\frac{1}{2}$.

Die Umkehrfunktion $\overline{f}$ von f ist allgemein gekennzeichnet durch $\overline{f}(f(x)) = x$ und $\overline{f}(f(x)) = x$ auf einem gewissen gemeinsamen Definitionsbereich .

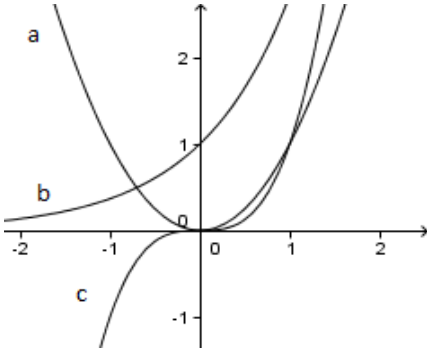
Dieses gilt hier für alle reellen Zahlen x, denn

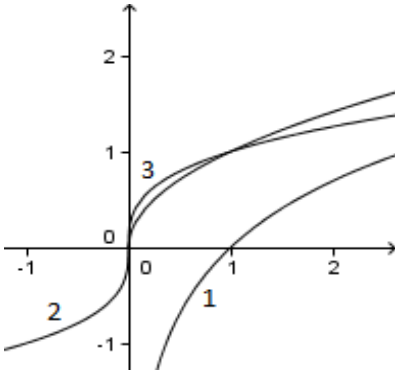
$$\overline{f}(f(x)) = \overline{f}(2x+1) = \frac{1}{2}(2x+1) - \frac{1}{2} = x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = x \quad \text{und}$$

$$f(\overline{f}(x)) = f(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}) = 2(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}) + 1 = x + 1 - 1 = x \quad .$$

Das Produkt von M und B ist $-\frac{1}{4}$ *oder -0,25, also Buchstabenpaar TA.*

❹





Ordne den Funktionen a bis c die Umkehrfunktionen 1 bis 3 zu.

Lösung

Eine Funktion f lässt sich nur dann umkehren, wenn die Zuordnung zwischen x- und y- Variable „eineindeutig“ ist, d.h. wenn zwei verschiedenen x-Werten auch verschiedene y-Werte zugeordnet werden. Anderenfalls kann die Zuordnung nämlich nicht in eindeutiger Weise umgekehrt werden. Man muss also zur Ermittlung einer Umkehrfunktion ggf. den Definitionsbereich so einschränken, dass eine eineindeutige Zuordnung gegeben ist.

Die Graphen zueinander inverser Funktionen liegen spiegelbildlich zur Winkelhalbierenden, deswegen gelten folgende Zuordnungen:

a) a und 3 (mit Einschränkung auf den rechten Ast der Parabel, siehe oben)

b) b und 1 c) c und 2

Also ist die Lösungszahl 312, mithin das Lösungsbuchstabenpaar GS

5 Die Funktionen a bis f sind durch Definitionsbereich und Funktionsterm angegeben. Bestimme für die Umkehrfunktionen jeweils Funktionsterm und Definitionsbereich.

a) $a(x)=2x+3$ D = R
b) $b(x)=x^2$ D = {x ϵ R| x ≥ 0}
c) $c(x)=x^2$ D = {x ϵ R| x ≤ 0}
d) $d(x)=x^3$ D = R
e) $e(x)=\sqrt{x+1}$ D = {x ϵ R| x ≥ -1}
f) $f(x)=\sqrt[5]{x-2}$ D = R

Lösung

zu a) $\bar{a}(x)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ *D = R*

zu b) $\bar{b}(x)=\sqrt{x}$ *D = {x ϵ R | x ≥ 0}*

zu c) $\bar{c}(x)=-\sqrt{x}$ *D = {x ϵ R | x ≥ 0}*

zu d) $\bar{d}(x)=\begin{cases}-\sqrt[3]{|x|} & D=\{x\,\epsilon\,R\,|\,x<0\}\\ \sqrt[3]{x} & D=\{x\,\epsilon\,R\,|\,x\geq 0\}\end{cases}$

zu e) $\bar{e}(x)=x^2-1$ *D = {x ϵ R | x ≥ 0}*

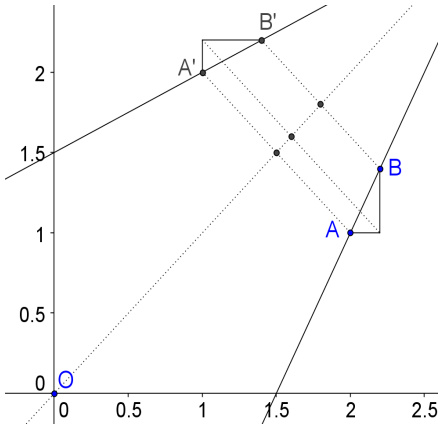
zu f) $\bar{f}=x^5+2$ *D = R*

Auf ganz R sind die Funktionen $\bar{a},\bar{d},\bar{f}$ definiert, eine zweite oder dritte Wurzel enthalten $\bar{b},\bar{c},\bar{d}$, d.h. jeweils drei Funktionen.

Das Produkt beider Anzahlen ist 9, also Buchstabenpaar SC.

6 Eine lineare Funktion f geht durch die Punkte A(2|1) und B(2,2|1,4). Zeichne das Steigungsdreieck und bestimme die Steigung der Funktion f bei der Stelle 2. Spiegele das Steigungsdreieck an der Winkelhalbierenden und bestimme so die Steigung der Umkehrfunktion $\bar{f}$ bei der Stelle 1.

Das Produkt der Steigung von $\bar{f}$ bei der Stelle 1 und $\bar{f}$ (1) ist ___.



Lösung

Es seien $(x_1|y_1)$ die Koordinaten eines Punktes P_1 und $(x_2|y_2)$ die Koordinaten eines Punktes P_2 .

Dann ist die Steigung im zugehörigen Steigungsdreieck $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

Übertragen auf die beiden Punkte A und B heißt das: $m=\frac{1{,}4-1}{2{,}2-2}=2$.

Bei Spiegelung an der Winkelhalbierenden vertauschen sich x- und y-Komponente eines Punktes, d.h. wenn man $P(x|y)$ spiegelt, entsteht $P'(x'|y')=P'(y|x)$.
Das durch die Punkte A' und B' definierte Steigungsdreieck hat also die Steigung:
$M=\frac{2{,}2-2}{1{,}4-1}=\frac{1}{2}$. Es gilt somit der Zusammenhang $m=\frac{1}{M}$.
Da $\overline{f}(1)=2$ und für die Steigung der Geraden, welche Graph der Umkehrfunktion ist, gilt $M=\frac{1}{2}$,

also ist das Produkt beider 1 und somit Buchstabenpaar HU gesucht.

❼ Firma Müller baut kugelförmige Wassertanks. Für ihre Planungen benötigt sie einen Funktionsterm für das Volumen abhängig vom Radius V(R) und für die Umkehrfunktion R(V). Gib die Funktionsterme an. Ein Kunde bestellt einen Tank mit einem Volumen von 20 m³. Bestimme den Radius in dm.

Lösung

Die Funktion V(R) ist die Volumenformel der Kugel, d.h. $V(R)=\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3$.

Wenn man diese Gleichung nach R umstellt, entsteht $R(V)=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$.

Ein Tankvolumen von 20 m³ entspricht 20000 dm³ (das sind 20000 Liter).
Setzen wir diesen Wert in die Funktion R(V) ein, so haben wir:

$$R(20000)=\sqrt[3]{\frac{3\cdot 20000}{4\cdot\pi}}\approx 16{,}84\,dm\approx 17\,dm$$

Die Summe aus dem auf ganze dm gerundeten Radius und dem Exponenten von R in V(R) ist also 20, d.h. Buchstabenpaar LE.

Lösungen mit Kennsilben													
9 SC	3,5 BI	20 LE	-2 NZ	0,25 UN	1 HU	321 SG	2,5 GA	10 RE	-3 LD	-0,25 TA	4 FO	312 GS	30 RM
Lösungswort: GANZTAGSSCHULE													

❽ (Expertenaufgabe)
Eine Bakterienkultur wiegt anfangs 2 g und verdoppelt ihre Masse alle 50 h. Stelle einen Funktionsterm für die Masse m in g abhängig von der Wachstumsdauer t in h auf. Stelle einen Graphen und eine Wertetabelle für die Umkehrfunktion auf.
Bestimme die Wachstumsdauer zur Gewinnung einer Masse von 1 kg.
Die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion zur Basis 2 heißt Logarithmus zur Basis 2 , kurz $\log_2(x)$. Stelle den Term der Umkehrfunktion auf.

Lösung

Wir benötigen eine Funktion f mit den Eigenschaften:

a) $f(0)=2$ und b) $f(t+50)=2\cdot f(t)$ für alle t.

Setzen wir für f an $f(t)=C\cdot a^t$, dann kann man die beiden Parameter C und a so bestimmen, dass a) und b) erfüllt sind, nämlich

aus a) $C=2$ und

aus b) $a^{t+50}=a^t\cdot a^{50}=2a^t$ folgt: $a^{50}=2$ bzw. $a=2^{\frac{1}{50}}=2^{0,02}$.

Eine Funktion mit den gewünschten Eigenschaften ist also: $f(t)=2\cdot 2^{0,02t}$ oder $f(t)=2^{0,02\cdot t+1}$.

Mit dieser Funktion kann man folgende Wertetabelle aufstellen:

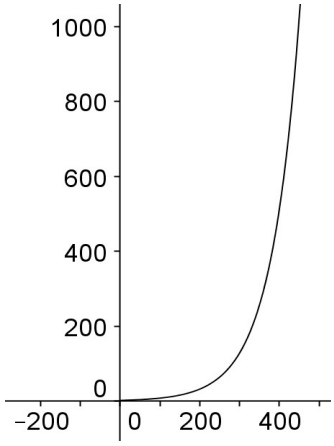
$t[h]$	0	50	100	150	200	250	300	350	400	450
$f(t)[g]$	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

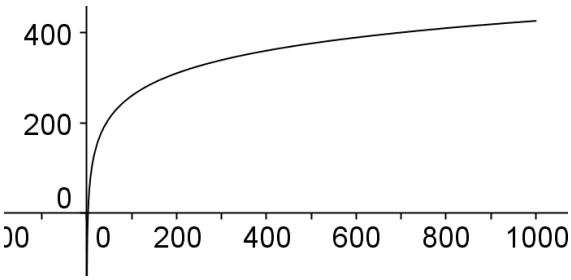
Wenn man die Rolle von erster und zweiter Komponente vertauscht, bezeichnet dieselbe Wertetabelle die Punkte auf dem Graphen der Umkehrfunktion.

Der Funktionsterm für die Umkehrfunktion ergibt sich aus

$$\log_2(f(t))=\log_2(2^{0,02\cdot t+1})=0,02\cdot t+1 \Rightarrow t=\frac{\log_2(f)-1}{0,02}$$

Die Graphen von Funktion und Umkehrfunktion haben folgendes Aussehen:





Mit der Umkehrfunktion kann man die Zeit ausrechnen, bis die Masse 1 kg (=1000 g) erreicht ist, d.h. $t=\frac{(\log_2(1000)-1)}{0,02}\approx 448,29\approx 450\,Stunden$