



Fit in Mathe

Musterlösungen

1

Juli

Klassenstufe 10

Thema

Terme 2

- ① Berechne geschickt (ohne Taschenrechner) folgende Terme, z.B.

$$203 \cdot 16 = 200 \cdot 16 + 3 \cdot 16 = 3200 + 48 = 3248.$$

a) $114 \cdot 99$ b) $15 \cdot 123 + 15 \cdot 77$ c) $31 \cdot 27$ d) $72 \cdot 68 + 144 \cdot 66$

Lösung

zu a) $114 \cdot 99 = 114 \cdot 100 - 14 \cdot 1 = 11400 - 14 = 11386$

zu b) $15 \cdot 123 + 15 \cdot 77 = 15 \cdot (123 + 77) = 15 \cdot 200 = 3000$

zu c) $31 \cdot 27 = 30 \cdot 27 + 27 = 810 + 27 = 837$

zu d) $72 \cdot 68 + 144 \cdot 66 = 144 \cdot 34 + 144 \cdot 66 = 144 \cdot (34 + 66) = 144 \cdot 100 = 14400$

Die Summe aller Quersummen ist $19+3+18+9=49$ (NO)

- ② Vereinfache folgende Terme

a) $17a - 23a$ b) $(\frac{5}{a/2} + \frac{7}{a/3}) \cdot 15a$ c) $15x^3 - 45x^3 \cdot 99$ d) $4 \cdot \sqrt{a} + 7 \cdot \sqrt{a} - 3 \cdot \sqrt{4 \cdot a}$

Lösung

zu a) $17a - 23a = -6a$

zu b) $(\frac{5}{a/2} + \frac{7}{a/3}) \cdot 15a = (\frac{10}{a} + \frac{21}{a}) \cdot 15a = \frac{31}{a} \cdot 15a = 31 \cdot 15 = 465$

zu c) $15x^3 - 45x^3 \cdot 99 = 15x^3 - 45x^3 \cdot 100 + 45x^3 = 60x^3 - 4500x^3 = -4440x^3$

zu d) $4 \cdot \sqrt{a} + 7 \cdot \sqrt{a} - 3 \cdot \sqrt{4 \cdot a} = (4 + 7 - 3 \cdot 2) \cdot \sqrt{a} = 5 \cdot \sqrt{a}$

Die Quersumme aller Zahlen der Lösungen ist $6+15+12+5 = 38$ (RD).

- ③ Löse die Gleichungen

a) $5x^2 - 30x + 40 = 15$ b) $x^3 - 7 \cdot (0,5x^2 + 14x - 10) = 0,5x^3 - 3,5x^2 - 98x + 102$

c) $\frac{11}{3} \cdot x + 27 = \frac{2}{3} \cdot x + 12$ d) $x^5 \cdot 3 \cdot x^k \cdot 2x^2 + x^3 = x^2 \cdot x$

Lösung

zu a)

$$5x^2 - 30x + 40 = 15 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 3 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 3^2 = 2^2 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 2^2$$

$$\Leftrightarrow x-3 = 2 \text{ oder } x-3 = -2 \Leftrightarrow x = 5 \text{ oder } x = 1$$

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.



zu b)

$$x^3 - 7 \cdot (0,5x^2 + 14x - 10) = 0,5x^3 - 3,5x^2 - 98x + 102$$

$$x^3 - 3,5x^2 - 98x + 70 = 0,5x^3 - 3,5x^2 - 98x + 102$$

$$x^3 + 70 = 0,5x^3 + 102$$

$$0,5x^3 = 32$$

$$x^3 = 64$$

$$\Leftrightarrow x = 4$$

zu c)

$$\frac{11}{3} \cdot x + 27 = \frac{2}{3} \cdot x + 12 \Leftrightarrow \left(\frac{11}{3} - \frac{2}{3}\right) \cdot x = -15 \Leftrightarrow \frac{9}{3} \cdot x = -15 \Leftrightarrow x = -5$$

zu d)

$$x^5 \cdot 3 \cdot x^k \cdot 2x^2 + x^3 = x^2 \cdot x \Leftrightarrow 6 \cdot x^{5+k+2} = 0 \Leftrightarrow 6 \cdot x^{7+k} = 0 \Rightarrow x = 0$$

Die Summe aller Lösungen ist $5+1+4-5 = 5$ (AT).

4 Vereinfache folgende Terme

a) $4^3 \cdot \frac{4^4}{4^5} + 4^3$ b) $(2^{50})^{0,2}$ c) $5^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{5^{\frac{5}{3}}}{5^2}$

d) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{2}$ e) $2^{-3} \cdot 3^{-2} \cdot 216$

Lösung

zu a) $4^3 \cdot \frac{4^4}{4^5} + 4^3 = 4^3 \cdot 4^{-1} + 4^3 = 4^2 + 4^3 = 16 + 64 = 80$

zu b) $(2^{50})^{0,2} = 2^{50 \cdot 0,2} = 2^{10} = 1024$

zu c) $5^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{5^{\frac{5}{3}}}{5^2} = 5^{\frac{1}{3} + \frac{5}{3} - 2} = 5^{2-2} = 5^0 = 1$

zu d) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{2} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = 2^{\frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6}} = 2^1 = 2$

zu e) $2^{-3} \cdot 3^{-2} \cdot 216 = 2^{-3} \cdot 3^{-2} \cdot 6^3 = 2^{-3} \cdot 3^{-2} \cdot 2^3 \cdot 3^3 = 2^0 \cdot 3^1 = 3$

Die Summe aller Quersummen der Lösungen ist $8+7+1+2+3 = 21$ (LA)

5 Vereinfache folgende Terme

a) $5^{-x} \cdot x^2 - x^3 \cdot 5^{2x} \cdot \frac{5^{-3x}}{x} + 24$ b) $k^2 \cdot 2^k / 2^4 / 2^5 / 2^7 / k \cdot 2^{-k+17} - 3k$

c) $\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{50})$ d) $\sqrt{48} \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{\frac{1}{3}})$

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.



Lösung

$$\text{zu a) } 5^{-x} \cdot x^2 - x^3 \cdot 5^{2x} \cdot \frac{5^{-3x}}{x} + 24 = 5^{-x} \cdot x^2 - x^2 \cdot 5^{-x} + 24 = 24$$

$$\begin{aligned} \text{zu b) } k^2 \cdot 2^k / 2^4 / 2^5 / 2^7 / k \cdot 2^{-k+17} - 3k &= k^2 \cdot 2^k \cdot 2^{-4} \cdot 2^{-5} \cdot 2^{-7} \cdot k^{-1} \cdot 2^{-k+17} - 3k \\ &= k^2 \cdot k^{-1} \cdot 2^{k-4-5-7-k+17} - 3k \\ &= k \cdot 2^1 - 3k \\ &= -k \end{aligned}$$

$$\text{zu c) } \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{50}) = \sqrt{2} \cdot 2 + \sqrt{2} \cdot 50 = 2 + 10 = 12$$

$$\text{zu d) } \sqrt{48} \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{\frac{1}{3}}) = \sqrt{48 \cdot 3} + \sqrt{\frac{48}{3}} = \sqrt{144} + \sqrt{16} = 12 + 4 = 16$$

Die Summe aller Zahlen mit $k=2$ ist $24-2+12+16=50$ (NT).

6 Korrigiere oder bestätige folgende Rechnungen (bel. heißt beliebig)

- a) $g^{-4} \cdot g^2 = -2g$ mit $g \in \mathbb{R}$ bel. b) $4^t \cdot 4^s \cdot 12^7 \cdot 3^{-6} = 3 \cdot 4^{t+s+7}$ mit $s, t \in \mathbb{R}$ bel.
 c) $-\frac{1}{1000^n} \cdot (-0,001^n) = 10^{-6n}$ d) $z^{(4^3)} = z^{12}$ mit $z \in \mathbb{R}$ bel.

Lösung

zu a) Nur sinnvoll für $g \neq 0$, da g^{-4} sonst nicht definiert.
 Angenommen es gelte die Gleichheit, dann ist

$$g^{-4} \cdot g^2 = -2g \Leftrightarrow g^{-2} = -2 \cdot g \Leftrightarrow g^{-3} = -2 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} = g^3 \Leftrightarrow g = -\sqrt[3]{2}$$

also nicht für beliebige g .

$$\begin{aligned} \text{zu b) } 4^t \cdot 4^s \cdot 12^7 \cdot 3^{-6} &= 3 \cdot 4^{t+s+7} \Leftrightarrow \\ 4^{t+s} \cdot 3^7 \cdot 4^7 \cdot 3^{-6} &= 3 \cdot 4^{t+s+7} \Leftrightarrow \\ 4^{t+s+7} \cdot 3^{7-6} &= 3 \cdot 4^{t+s+7} \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist wahr für alle s und t .

zu c) Es ist

$$\begin{aligned} -\frac{1}{1000^n} \cdot (-0,001^n) &= \frac{1}{(10^3)^n} \cdot (10^{-3})^n \\ &= 10^{-3n} \cdot 10^{-3n} \\ &= 10^{-6n} \end{aligned}$$

also ist die Gleichung wahr für alle n .

$$\begin{aligned} \text{zu d) } z^{(4^3)} &= z^{12} \Leftrightarrow \\ z^{64} &= z^{12} \Leftrightarrow \\ z^{52} &= 1 \Leftrightarrow \\ z &= 1 \end{aligned}$$

Die Gleichung ist also nur wahr für $z = 1$, also nicht für beliebige z .

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.



Fit in Mathe

Musterlösungen

4

Juli

Klassenstufe 10

Die Anzahl der Gleichungen, die nicht oder nur eingeschränkt gültig sind, ist 2 (IK).

- 7** Die Lösung einer Gleichung $a^x=b$ nach x ist der Logarithmus von b zur Basis a , kurz $x = \log_a b$.

Beispiel: $2^x = 32 \Rightarrow \log_2 32 = 5$, denn $2^5 = 32$

Löse folgende Gleichungen, wenn möglich:

a) $3^x = 243$ b) $2^x = 0$ c) $10^x = 1$ d) $7^x = 49$ e) $10^x = 1/10000$

Lösung

zu a) $3^x = 243 \Leftrightarrow 3^x = 3^5 \Leftrightarrow x = \log_3(3^5) = 5$

zu b) $2^x = 0$. Da $2^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, ist die Gleichung nicht lösbar.

zu c) $10^x = 1 \Leftrightarrow x = \log_{10}(1) = 0$

zu d) $7^x = 49 \Leftrightarrow 7^x = 7^2 \Leftrightarrow x = \log_7(7^2) = 2$

zu e) $10^x = 1/10000 \Leftrightarrow 10^x = 10^{-4} \Leftrightarrow x = \log_{10}(10^{-4}) = -4$

Die Summe aller Lösungen ist 3 (PA)

- 8** Nadja hat 4000 € auf einer Bank für 4 Jahre angelegt. Sie erhält Jahreszinsen bei einem Zinssatz von 5% und zahlt noch keine Steuern.

Wie viel Geld hat Nadja nach 4 Jahren auf dem Konto ?

Lösung

Der jährliche Aufzinsungsfaktor ist 1,05, also ist das Kapital nach 4 Jahren:

$$\begin{aligned}
 4000 \cdot 1,05^4 &= 4 \cdot 10^3 \cdot (1 + 5 \cdot 10^{-2})^4 \\
 &= 4 \cdot 10^3 \cdot (1 + 4 \cdot 5 \cdot 10^{-2} + 6 \cdot 5^2 \cdot 10^{-4} + 4 \cdot 5^3 \cdot 10^{-6} + 5^4 \cdot 10^{-8}) \\
 &= 4 \cdot 10^3 + 80 \cdot 10 + 600 \cdot 10^{-1} + 2000 \cdot 10^{-3} + 2500 \cdot 10^{-5} \\
 &= 4000 + 800 + 60 + 2 + 0,025 \\
 &\approx 4862,03
 \end{aligned}$$

Nach 4 Jahren hat Nadja 4862,03 € (KT)

Lösungen mit Kennsilben

4862,03	48	50	38	39	49	4542,1	3	5	2	1	21
KT	ES	NT	RD	IN	NO	CA	PA	AT	IK	RM	LA

Lösungswort: NORDATLANTIKPAKT

- 9** Expertenaufgabe

Der pH-Wert in der Chemie ist ein Maß für die Konzentration $c_{H_3O^+}$ der H^+ - bzw. H_3O^+ -Ionen.

Er ist definiert durch $pH = -\log_{10}(c_{H_3O^+} \cdot 1 \text{ mol})$.

a) Wir wollen eine Salzsäure der Konzentration $c_{H_3O^+} = 0,1 \text{ mol/l}$ herstellen.

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.



Wie groß ist der pH-Wert dieser Lösung?

- b) Nun haben wir leider bedingt gut gearbeitet und versehentlich einen pH-Wert von 4 erzeugt. Berechne die Konzentration unserer Lösung!
- c) Wir mischen 1l unserer Lösung mit 1l destilliertem Wasser mit pH-Wert 7. Wie groß sind die Konzentration und der pH-Wert der Mischung?
Hinweis: Der Logarithmus von 500,5 zur Basis 10 ist rund 2,7.
- d) Wir haben Salzsäure mit pH-Wert 1 in der Chemiesammlung gefunden. Diese wollen wir mit unserer Salzsäure mit pH-Wert 4 mischen, sodass wir 1l Salzsäure mit einem pH-Wert von 3 erhalten.
Berechne die Volumina der beiden Edukte.

Lösung

zu a)

$$pH = -\log_{10}(c_{H_3O^+} \cdot 1 \text{ l/mol}) = -\log_{10}(0,1 \text{ mol/l} \cdot \text{l/mol}) = -\log_{10}(10^{-1}) = -(-1) = 1$$

zu b)

$$4 = -\log_{10}(x) \Rightarrow 10^4 = 10^{-\log_{10}(x)} = \frac{1}{10^{\log_{10}(x)}} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = 10^{-4} = 0,0001 \text{ mol/l}$$

zu c)

Es gilt für die Konzentration des destillierten Wassers

$$pH = -\log_{10}(c_{H_2O}) = 7 \Rightarrow c_{H_2O} = 10^{-7}$$

Daraus folgt für die Konzentration der Mischung

$$c_{neu} = \frac{(c_{H_3O^+} + c_{H_2O})}{2} = 10^{-7} \cdot \frac{10^3 + 1}{2} = 10^{-7} \cdot 500,5$$

und damit

$$pH = -\log(c_{neu}) = -\log_{10}(500,5 \cdot 10^{-7}) = -\log_{10}(500,5) + 7 \approx 7 - 2,7 = 4,3$$

zu d)

Die unbekannt Volumina seien x für die Salzsäure mit pH-Wert 1 ($c_1 = 10^{-1}$) und y für die Salzsäure mit pH-Wert 4 ($c_4 = 10^{-4}$).

Beide Volumina sollen die Bedingung erfüllen: $1 = x + y$.

Die Konzentration der Mischung ist $c_3 = \frac{x}{x+y} \cdot c_1 + \frac{y}{x+y} \cdot c_4 = x \cdot c_1 + y \cdot c_4$

Mit obigen Werten für die Konzentrationen ergibt sich

$$10^{-3} = x \cdot 10^{-1} + y \cdot 10^{-4} \Leftrightarrow 10 = x \cdot 10^3 + y$$

Das führt insgesamt auf das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & 1 \\ 1000x + y & = & 10 \end{array}$$

Subtraktion beider Gleichungen führt auf $999x = 9 \Leftrightarrow x = \frac{1}{111} \text{ l}$ und daraus folgt:

$$y = \frac{110}{111} \text{ l}$$

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.