



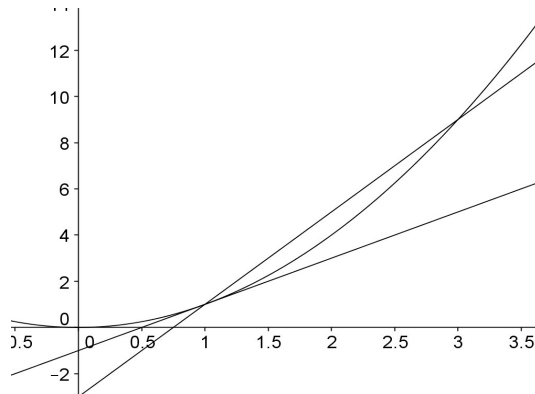
## 1 Sekanten und Tangente

Zur Funktion mit  $f(x) = x^2$  sollen die Steigungen  $m$  der Sekanten an den Funktionsgraphen durch die Punkte  $(1|1)$  und  $(1+h|(1+h)^2)$  berechnet werden.

Vervollständige die Tabelle:

h	2	1,5	1	0,8	0,5	0,1
m	4	3,5	3	2,8	2,5	2,1

In der obigen Tabelle gehen die Werte von  $h$  gegen Null. Dabei gehen die Sekanten gegen die Tangente durch  $(1|1)$ . Zeichne die Sekanten ein.



### Lösung

Die Summe aller zu findenden Zahlen -eingetragen in obiger Tabelle- ist  $3,5 + 3 + 2,8 + 2,5 + 2,1 = 13,9$  (WU).

## 2 Tangente und Ableitung

Stelle anhand der Tabelle eine Formel für  $m(h)$  auf. Der Wert  $m(0)$  stellt dann die Steigung der Tangente durch  $(1|1)$  dar. Bestimme diese Tangentensteigung.

Berechne die Ableitung  $f'(1)$  und vergleiche mit der Tangentensteigung.

### Lösung

$$m(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{x_0+h-x_0} = \frac{(1+h)^2 - 1^2}{1+h-1} = \frac{h^2+2h}{h} = 2+h$$

Für  $h = 0$  ergibt sich  $m(0) = 2$ .

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2+h = 2$$

Es gilt  $f'(1) = m(0) = 2$ .

Die Zahl  $m(0)$  ist 2 (RZ).

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.



### 3 Aufstellen von Tangentengleichungen

Die Gleichung der Tangente zu  $f(x)$  durch den Punkt  $(1|1)$  ergibt sich daraus, dass an einer Stelle  $x$  der Funktionswert  $f(1)$  um  $m \cdot (x-1)$  zugenommen haben muss. Daher ist  $t(x) = 1 + m \cdot (x-1)$ .

Gib zu folgenden Funktionstermen  $f(x)$  die Gleichung der Tangente durch den Punkt  $(2|f(2))$  an: a)  $f(x) = x^2$  b)  $f(x) = x^3$  c)  $f(x) = -x^2 + x^4$

#### Lösung

Die Tangentengleichung ist  $t(x) = f(2) + m \cdot (x-2) = f(2) + f'(2) \cdot (x-2)$

zu a) Hier ist  $f(2) = 4$  und  $f'(2) = 4$ , also  $t(x) = 4 + 4 \cdot (x-2) = 4x - 4$ .

zu b) Hier ist  $f(2) = 8$  und  $f'(2) = 12$ , also  $t(x) = 8 + 12 \cdot (x-2) = 12x - 16$

zu c) Hier ist  $f(2) = 12$  und  $f'(2) = 28$ , also  $t(x) = 12 + 28 \cdot (x-2) = 28x - 44$

Die Summe aller  $t(3)$ -Werte ist  $8 + 20 + 40 = 68$  (EL)

### 4 Tangenten als Näherung

Da sich die Tangente an den Funktionsgraphen zu  $f(x)$  anschmiegt, wird die Tangentengleichung auch als Näherung für die Funktion verwendet. Überprüfe das

am Beispiel  $f(x) = x^2$  und die Tangente durch den Punkt  $(1|1)$ , indem du die Tabelle vervollständigst:

x	1	1,1	1,2	0,9	0,8	0,7	0,6
f(x)	1	1,21	1,44	0,81	0,64	0,49	0,36
t(x)	1	1,2	1,4	0,8	0,6	0,4	0,2

#### Lösung

Die Tangentengleichung (siehe Aufgabe 3) ist:  $t(x) = f(1) + f'(1) \cdot (x-1) = 2x - 1$ . Daraus ergeben sich die oben in die Tabelle eingetragenen Werte für  $t(x)$ .

Die Summe aller Differenzen beider Funktionswerte ist  $0,01 + 0,04 + 0,01 + 0,04 + 0,09 + 0,16 = 0,35$  (ZI)

### 5 Berechnung einer Tangentengleichung mit einem Gleichungssystem

Zu der Funktion  $f(x) = x^2$  findet man die Gleichung der Tangente durch  $(3|f(3))$  alternativ so, dass man für die Geradengleichung  $t(x) = m \cdot x + b$  die beiden Parameter  $m$  und  $b$  bestimmt. Dazu verwendet man die Gleichheit der Funktionswerte  $f(3) = t(3)$  und die Gleichheit der Ableitungen  $f'(3) = t'(3)$ .

Bestimme die Tangentengleichung auf diese Weise.

#### Lösung

Aus  $f(3) = t(3)$  folgt: (i)  $9 = m \cdot 3 + b$  und aus  $f'(3) = t'(3)$  folgt (ii)  $6 = m$ . (ii) in (i) eingesetzt ergibt  $b = -9$ , also ist die Tangentengleichung

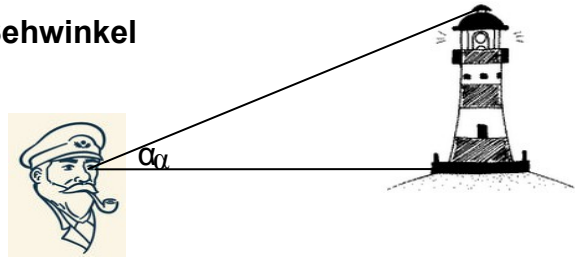
$$t(x) = 6 \cdot x - 9$$

Die Nullstelle der Tangentengleichung ist 1,5 (EH).

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.



### 6 Entfernung und Sehwinkel



Ein Kapitän sieht einen Leuchtturm mit einer Höhe von  $h = 40$  m unter einem Sehwinkel von  $\alpha = 0,1$  rad. Bestimme die Entfernung  $e$ , wobei du den benötigten Funktionswerte von  $\tan(\alpha)$  näherungsweise mit der Gleichung der Tangenten an den Funktionsgraphen durch  $(0|0)$  berechnen kannst.

#### Lösung

$$\text{Es gilt die Beziehung } \frac{40}{e} = \tan(0,1) \Leftrightarrow \frac{40}{\tan(0,1)} = e$$

$\tan(0,1)$  soll näherungsweise durch den Tangentenwert bei  $\alpha=0,1$  berechnet werden. Dieser ist  $t(0,1) = \tan'(0) \cdot 0,1$

$$\text{Die Ableitung des Tangens ist } \tan'(\alpha) = \frac{1}{\cos^2(\alpha)}, \text{ also } \tan'(0) = 1.$$

Damit gilt:

$$e = \frac{40}{\tan(0,1)} \approx \frac{40}{t(0,1)} = \frac{40}{0,1} = 400$$

Die Entfernung ist 400 m (EN).

#### Lösungen mit Kennsilben

400	0,3	3	13,9	68	1,5	0,35	2	66	14,1	600	1,2
EN	HE	GE	WU	EL	EH	ZI	RZ	NK	GE	TE	AT

Lösungswort: WURZELZIEHEN

### 7 Expertenaufgabe (Fehlerrechnung)

Fehlerrechnung beruht wegen kleiner Messwertabweichungen auf Linearisierung. Jemand möchte die Tiefe eines Brunnen erkunden. Er lässt einen Stein hineinfallen und misst die Fallzeit als  $5 \pm 0,5$  s. Aus dem Physikunterricht weiß er, dass der Zusammenhang zwischen Weg  $h$  und Zeit  $t$  durch die Funktion

$$h(t) = \frac{1}{2} g t^2 \text{ mit } g = 9,81 \frac{m}{s^2} \text{ als der Fallbeschleunigung gegeben ist.}$$

Er gibt das Ergebnis als  $h(5) \pm \Delta h$  m mit linearisiertem absoluten Fehler  $\Delta h$  an. Wie ist seine Aussage ?

#### Lösung

Es ist  $h(5) = 122,625$  m. Das Fehlerintervall von  $h(5)$  ist  $[h(5-0,5), h(5+0,5)]$ .

Wir nähern die Intervallgrenzen durch die entsprechenden Werte der Tangente an, d.h.  $h(5-0,5) \approx h(5) + h'(5) \cdot (5-0,5-5) = h(5) - h'(5) \cdot 0,5$  bzw.

$$h(5+0,5) \approx h(5) + h'(5) \cdot (5+0,5-5) = h(5) + h'(5) \cdot 0,5$$

Wegen  $h'(t) = g \cdot t$  ist  $h'(5) = 9,81 \cdot 5 = 49,05$ , woraus  $h'(5) \cdot 0,5 = 24,525$  folgt.

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.



# ***Fit in Mathe***

Musterlösungen

4

Juli

Klassenstufe 11

Das Intervall kann also näherungsweise bestimmt werden als

$$[122,625 - 24,525; 122,625 + 24,525] = [98,1; 147,15]$$

Bei der Messungenauigkeit für die Zeit ist die Aussage also:

Der Brunnen ist  $122,625 \pm 24,525$  m tief.

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.