Fit in Mathe

Musterlösungen 1

Juli Klassenstufe 12

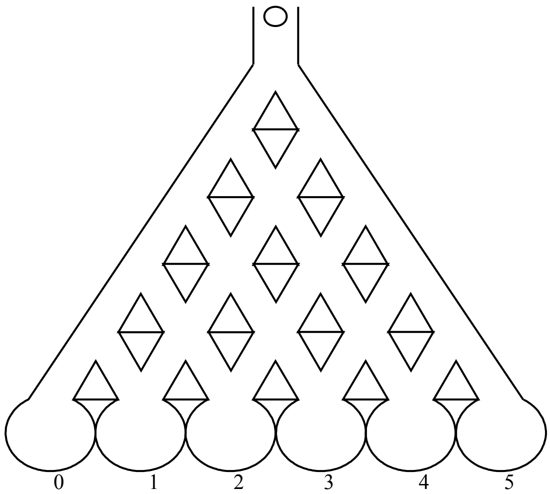
Thema	**Statistik**

❶ Die Kugel rollt hinab, geht bei jeder Raute mit der Wahrscheinlichkeit 50% nach rechts und landet in einem der Körbe k=0 bis k= 5.

a) Bestimme die Wahrscheinlichkeiten $P(X=0)$ bis $P(X=5)$.

b) Berechne für die Zufallsgröße X den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ.

c) Berechne die Wahrscheinlichkeit, mit der k in der σ-Umgebung von μ liegt und vergleiche mit der σ-Regel $P(\mu-\sigma\leq X\leq\mu+\sigma)\approx 0{,}68.$



d) Tom tippt: „Die nächste Kugel landet außerhalb der σ-Umgebung.“ Berechne die Wahrscheinlichkeit, mit der er sich irrt.

e) Für welche n und p ist die Verteilung aus a)

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}=B_{n,p}(k)\ ?$$

Lösung

zu a) Die Wahrscheinlichkeiten, in die entsprechenden Körbe zu fallen, sind

$$P(X=0)=\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}\qquad P(X=1)=5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{5}{32}\qquad P(X=2)=10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{10}{32}$$

$$P(X=3)=10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{10}{32}\qquad P(X=4)=5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{5}{32}\qquad P(X=5)=\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$$

zu b) Der Erwartungswert allgemein ist $\mu=\sum_{k=0}^{n}P(X=k)\cdot k$,

hier: $$\mu=\left(0\cdot\frac{1}{32}+1\cdot\frac{5}{32}+2\cdot\frac{10}{32}+3\cdot\frac{10}{32}+4\cdot\frac{5}{32}+5\cdot\frac{1}{32}\right)$$
$$=\frac{1}{32}\cdot(5+20+30+20+5)=\frac{80}{32}=2{,}5$$

Die Standardabweichung allgemein ist $\sigma=\sum_{k=0}^{n}P(X=k)\cdot(\mu-k)^2$,

hier

$$\sigma^2=\frac{1}{32}\cdot(2{,}5-0)^2+\frac{5}{32}\cdot(2{,}5-1)^2+\frac{10}{32}\cdot(2{,}5-2)^2+\frac{10}{32}\cdot(2{,}5-3)^2+\frac{5}{32}\cdot(2{,}5-4)^2+\frac{1}{32}\cdot(2{,}5-5)^2$$
$$=\frac{2}{32}\cdot2{,}5^2+\frac{10}{32}\cdot1{,}5^2+\frac{20}{32}\cdot0{,}5^2$$
$$=\frac{1}{16}\cdot(6{,}25+11{,}25+2{,}5)=\frac{20}{16}=\frac{5}{4}\qquad\Rightarrow\sigma=\frac{\sqrt{5}}{2}\approx1{,}1$$

zu c)
Die σ-Umgebung um μ ist das Intervall $[1{,}4\,;3{,}6]$. In diesem Intervall liegen die Zufallsgrößen 2 und 3. Die Summe der Wahrscheinlichkeiten dieser beiden Größen ist $\frac{20}{32}=\frac{5}{8}=0{,}625=62{,}5\,\%$, was in etwa mit 68% übereinstimmt.

zu d)
Da die Wahrscheinlichkeit, innerhalb der σ-Umgebung zu landen, 62,5 % ist, ist die Gegenwahrscheinlichkeit für außerhalb 37,5 %. Die Irrtumswahrscheinlichkeit zu Toms Prognose ist also 62,5%.

zu e)
Die Wahrscheinlichkeiten einer Binomialverteilung sind

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}=B_{n,p}(k)\,.$$

Bei obigem Zufallsexperiment liegen sie mit n=5 und p=0,5 vor.

Die rechte Grenze der σ-Umgebung auf eine Stelle gerundet ist 3,6 (PO)

---

❷ Für eine Binomialverteilung $B_{n,p}(k)$ gelten folgende <u>σ - Regeln</u>:
Für große n (typisches Kriterium: σ > 3) gilt:

$$P(\mu-\sigma\le X\le\mu+\sigma)\approx 0{,}680$$
$$P(\mu-2\sigma\le X\le\mu+2\sigma)\approx 0{,}955$$
$$P(\mu-1{,}64\,\sigma\le X\le\mu+1{,}64\,\sigma)\approx 0{,}9$$
$$P(\mu-1{,}96\,\sigma\le X\le\mu+1{,}96\,\sigma)\approx 0{,}95$$
$$P(\mu-2{,}58\,\sigma\le X\le\mu+2{,}58\,\sigma)\approx 0{,}99$$

Diese Regeln gelten auch für die Normalverteilung.
Berechne für $B_{n=100,p=0,14}(k)$ die Werte der Zufallsgröße, die innerhalb der
(a) 1,96σ-Umgebung (b) 2,58σ-Umgebung (c) 1,64σ-Umgebung liegen.

<u>Lösung</u>
Bei einer Binomialverteilung ist $\mu=n\cdot p$, hier $\mu=100\cdot 0{,}14=14$
und $\sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$, hier: $\sigma=\sqrt{100\cdot 0{,}14\cdot 0{,}86}=\sqrt{12{,}04}\approx 3{,}45$.
Damit handelt es sich um folgende Intervalle

zu a) Die 1,96σ-Umgebung ist $[14-1{,}96\cdot 3{,}45\,,\,14+1{,}96\cdot 3{,}45]\approx[7{,}2\,;20{,}8]$.
Hierin liegen die k's mit $8\le k\le 20$

zu b) Die 2,58σ-Umgebung ist $[14-2{,}58\cdot 3{,}45\,,\,14+2{,}58\cdot 3{,}45]\approx[5{,}1\,;22{,}9]$
Hierin liegen die k's mit $6\le k\le 22$

zu c) Die 1,64σ-Umgebung ist $[14-1{,}64\cdot 3{,}45\,,\,14+1{,}64\cdot 3{,}45]\approx[8{,}3\,;19{,}7]$
Hierin liegen die k's mit $9\le k\le 19$

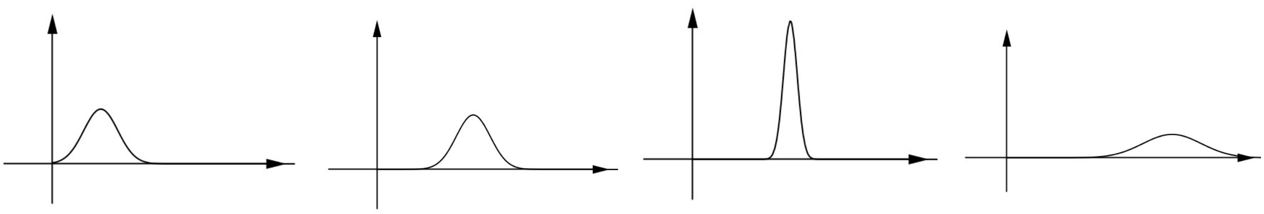
Die Summe aller kleinsten Werte der Zufallsgrößen ist 23 (PK)

❸ Für große n (typisches Kriterium: σ > 3) geht die Binomialverteilung wie folgt in die Normalverteilung über:

$$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = B_{n,p}(k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot n \cdot p \cdot (1-p)}} \cdot e^{-\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)}}$$

a) Ersetze in der obigen Normalverteilung n und p äquivalent durch μ und σ.
b) Vier Zufallsgrößen sind normalverteilt mit folgenden μ und σ.
(i) $\mu = 2, \sigma = 0{,}5$ (ii) $\mu = 2, \sigma = 0{,}2$ (iii) $\mu = 1, \sigma = 0{,}2$ (iv) $\mu = 4, \sigma = 1$
Ordne den Werten in der obiger Reihenfolge die Graphen der unten dargestellten Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen zu.

1. 2. 3. 4.



zu a)
Mit den Ersetzungen $\mu = n \cdot p$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$ wird die Normalverteilungs-funktion zu: $B_{n,p}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(k-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}}$.

zu b)
Die Positions-Nrn in passender Reihenfolge sind 2314 (ON)

❹ Bei einer Kommunalwahl haben 50 % der Wahlberechtigten gewählt. In drei Politik-kursen haben 42 von 64 Lernenden gewählt. Kann man mit einer Irrtumswahr-scheinkeit von

(a) 2,5 % und (b) 0,5 % sagen,

dass dieses Ergebnis nicht zufällig aufgetreten ist, sondern dass die Lernenden überdurchschnittlich häufig wählen? Hinweis: Da es viele Tausend Wahlberechtigte gibt, kann man von einer Binomialverteilung mit p = 0,5 ausgehen.

<u>Lösung</u>
Da eine Binomialverteilung angenommen wird, ist bei einer Stichprobengröße von $n = 64$ und einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}5$ der Erwartungswert
$\mu = n \cdot p = 64 \cdot 0{,}5 = 32$ und die Standardabweichung
$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{64 \cdot 0{,}25} = 4$

zu a)
Im Intervall $[32 - 1{,}96 \cdot 4 ; 32 + 1{,}96 \cdot 4] = [24{,}16 ; 39{,}84]$ liegen 95% der Zufallsgrößen..
Die Wahrscheinlichkeit, dass zufällig mehr als 39,84 Wählberechtigte gewählt ha-ben, beträgt 2,5 %. Es haben aber 42 Wahlberechtigte gewählt. Das ist bei Irrtums-wahrscheinlichkeit 2,5% bzw. 2,5% Signifikanzniveau kein Zufall.

zu b)
Im Intervall $[32-2{,}58\cdot 4\,;32+2{,}58\cdot 4]=[21{,}68\,;42{,}32]$ liegen 99% der Zufallsgrößen.. Die Wahrscheinlichkeit, dass zufällig mehr als 42,32 Wählberechtigte gewählt haben, beträgt 0,5 %. Es haben 42 Wahlberechtigte gewählt. Das ist bei Irrtumswahrscheinlichkeit 0,5% bzw. 0,5% Signifikanzniveau nur Zufall.

Die Summe der kleinsten Wählerzahlen außerhalb des Zufalls ist 40+43=83 (ZE).

❺ Bei einer Befragung von 225 Abiturientinnen und Abiturienten im Landkreis Stade gaben 180 an, sie wollten nach dem Abitur gerne studieren.

a) Bestimme alle Anteile p, die mit dem Stichprobenergebnis bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95% verträglich sind.
b) Bestimme den Stichprobenumfang, bei dem der Anteil p der Gesamtheit mit einer Genauigkeit von 1% (Sicherheitswahrscheinlichkeit 95%) geschätzt wird.

Lösung

Zunächst prüfen wir, ob die Sigma-Regel anwendbar ist, d.h. ob $\sigma \geq 3$ ist. p ist nicht gegeben, aber kann durch $\frac{180}{225}=0{,}8$ angenähert werden und daraus folgt $\sigma \approx \sqrt{225\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}=6$, also ist die Bedingung erfüllt.

Zu a)
Wenn k im 95%-Intervall liegt, heißt das: $225\cdot p-1{,}96\cdot\sigma \leq 180 \leq 225+1{,}96\cdot\sigma$. Wir nähern wie oben σ durch 6 und bekommen dadurch eine Ungleichungskette

$$225\cdot p-1{,}96\cdot 6 \leq 180 \leq 225\cdot p+1{,}96\cdot 6 \Leftrightarrow$$
$$225\cdot p-11{,}76 \leq 180 \leq 225\cdot p+11{,}76$$

Aus der vorderen Ungleichung folgt $p \leq \frac{191{,}76}{225} \approx 0{,}85$ und aus der zweiten $\frac{168{,}24}{225} \approx 0{,}75 \leq p$, also ergibt ein Intervall $[0{,}75\,;0{,}85]$, in dem die p's liegen, in deren 95%-Umgebung $k=180$ ist. Daraus können wir zurückschließen, dass die Grundgesamtheit -hier die Menge aller Abiturienten – mit 95%-iger Sicherheit zwischen 75% und 85% liegt.

Wegen $\sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$ lässt sich das Intervall für p auch genau bestimmen:

$$225\cdot p-1{,}96\cdot\sqrt{225\cdot p\cdot(1-p)}\leq 180\leq 225\cdot p+1{,}96\cdot\sqrt{225\cdot p\cdot(1-p)} \Leftrightarrow$$
$$-1{,}96\cdot\sqrt{225\cdot p\cdot(1-p)}\leq 180-225\cdot p\leq 1{,}96\cdot\sqrt{225\cdot p\cdot(1-p)}$$

also $(180-225\cdot p)^2 \leq 1{,}96^2\cdot 225\cdot p(1-p) \Leftrightarrow$

$$(0{,}8-p)^2 \leq \frac{1{,}96^2}{225}\cdot(p-p^2) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$(1+\frac{1{,}96^2}{225})\cdot p^2-(1{,}6+\frac{1{,}96^2}{225})\cdot p+0{,}64 \leq 0$$

Das quadratische Polynom hat die Nullstellen $p_1=0{,}743$ und $p_2=847$. Für alle p's zwischen diesen Nullstellen nimmt es Werte kleiner als 0 an.
Das genauere Intervall ist mithin $74{,}3\,\%\leq p\leq 84{,}7\,\%$.

Zu b)
Wir fragen nach der Stichprobengröße n, bei dem ein Ergebnis k mit 95%-iger Wahrscheinlichkeit höchstens 1 % vom Anteil der Grundgesamtheit abweicht. Das ist wegen $|\frac{k}{n}-p|\leq 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ der Fall, wenn

(i) $1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\leq 0{,}01$ ist.

p ist unbekannt, wir schätzen wie oben ab $p\approx 0{,}8$, d.h. $p\cdot(1-p)\approx 0{,}16$
Wenn also

(ii) $1{,}96\cdot\sqrt{\frac{0{,}16}{n}}\leq 0{,}01$ ist, dann ist auch die Ungleichung (i) erfüllt und erst recht

$|\frac{k}{n}-p|\leq 0{,}01$.

Aus (ii) folgt $1{,}96\cdot\sqrt{\frac{0{,}16}{n}}\leq 0{,}01 \;\Leftrightarrow\; 196\cdot 0{,}4\leq\sqrt{n} \;\Rightarrow\; 78{,}4^2\leq n$

d.h. man müsste eine Stichprobengröße von 6147 haben (was wahrscheinlich angesichts der ca 45000 Einwohner von Stade unrealistisch ist!)

Die ganzzahlig gerundete obere Grenze aus a) plus die Anzahl aus b) ist 6232 (RT).

Lösungen mit Kennsilben

23	19	3,4	80	2314	7115	83	25	3,6	3199	6154	4,1	6232	85	2143
PK	LB	SI	MO	ON	ND	ZE	HN	PO	ER	SH	JO	RT	CA	NY

Lösungswort: POPKONZERT

❻ Expertenaufgabe

10	15	25
20	40	20
15	25	30

Moderne Roboter nutzen Kameras und werten die Bilder autonom aus. Bei man-chen Bedingungen erzeugt die Kamera viele stochastische Fehler. Dann kann der Roboter seine Vermutung eines Lichtpunktes beurteilen, indem er den Helligkeitswert des zugehörigen Pixels als Signal S auffasst und für die Umgebungspixel den Mittelwert als μ und die empirische Standardab-weichung als σ deutet. Der Roboter vermutet, dass der hohe Helligkeitswert in der Mitte nicht zufällig aufgetreten ist.

a) Bestimme das Signal–Rausch–Verhältnis S/σ.
b) Überprüfe, ob die Irrtumswahrscheinlichkeit unter 0,5 % liegt.

<u>*Lösung*</u>
zu a)
Der Mittelwert der Werte um das mittlere Pixel ist:

$$\mu=\frac{10+15+25+20+30+25+15+20}{8}=20$$

Die empirische Standardabweichung σ ist:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{8}\cdot((-10)^2+(-5)^2+5^2+0^2+10^2+5^2+(-5)^2+0^2)} = \sqrt{\frac{300}{8}} \approx 6{,}1$$

Hiermit ergibt sich das Signal-Rausch-Verhältnis $\frac{S}{\sigma} = \frac{40}{6{,}1} \approx 6{,}6$.

Zu b)
Oberhalb der 2,58σ-Umgebung liegt das Ergebnis mit der Wahrscheinlichkeit 0,5 %.
Die Obergrenze der 2,58σ-Umgebung beträgt $\mu + 2{,}58\,\sigma = 20 + 2{,}58\cdot 6{,}1 = 35{,}7$.
Das ist kleiner als 40. Also ist die Irrtumswahrscheinlichkeit unter 0,5 %.