Thema **Trigonometrie mit Sinus- und Kosinussatz**

<u>Vorbemerkungen</u>

Für Winkelangaben wird hier, wenn nicht anders angegeben, das Bogenmaß verwendet. Es gilt $1\,rad = \frac{360°}{2\pi} \approx 57°$, bezeichnet das Verhältnis $\frac{\text{Länge des Kreisbogens}}{\text{Länge des Radius}}$ und ist insofern dimensionslos ist. Im folgenden verzichten wir deswegen auf die Angabe der Einheit.

Zur Berechnung von Winkeln soll, wenn nicht anders angegeben, die *Kleinwinkelnäherung* verwendet werden. Es gilt im Bogenmaß für *kleine* Winkel

$\sin(\alpha) \approx \alpha$ und $\cos(\alpha) \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$.

Für *größere* Winkel ist diese Näherung recht ungenau. Deshalb sind dort die allgemeinen Beziehungen zwischen Sinus und Kosinus zu verwenden.

Um den Sinus oder Kosinus eines Winkels $\pi > \alpha > \frac{\pi}{2}$ zu berechnen, sollte man folgende Beziehungen benutzen: $\sin(\alpha) = \sin(\pi - \alpha)$ bzw. $\cos(\alpha) = -\cos(\pi - \alpha)$.

Es empfiehlt sich weiterhin, bei Winkeln $\alpha > 0{,}5$ den Sinus mithilfe des Kosinus sowie bei Winkeln $\alpha > 1$ den Kosinus mithilfe des Sinus zu berechnen unter Nutzung der Beziehungen:

$\sin(\alpha) = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ bzw. $\cos(\alpha) = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$.

Nutze im folgenden für alle sin- und cos-Berechnungen diese Näherungen. Auch sollte zur Berechnung von Winkeln im Dreieck der Innenwinkelsummensatz ($\alpha + \beta + \gamma = \pi$) verwendet werden. Benutze als Näherung für π hier $\pi \approx 3{,}14$.

❶ Berechne unter Verwendung der oben angegebenen Näherungen

a) $\sin(0{,}1)$ b) $\sin(0{,}77)$ c) $\sin(1{,}57)$ d) $\sin(1{,}82)$ e) $\sin(2{,}94)$
f) $\cos(0{,}4)$ g) $\cos(1{,}37)$ h) $\cos(1{,}57)$ i) $\cos(1{,}97)$ j) $\cos(2{,}47)$

<u>Lösung</u>
zum Vergleich jeweils in Klammern dahinter das Taschenrechnerergebnis mit einer Genauigkeit von 5 Dezimalstellen und einer Angabe des relativen Fehlers.

zu a) $\sin(0{,}1) = 0{,}1 \quad (0{,}09983 \,/\, 0{,}17\%)$

zu b) $\sin(0{,}77) = \cos(1{,}57 - 0.77) = \cos(0{,}8) \approx 1 - \frac{0{,}8^2}{2} = 0{,}68 \quad (0{,}69671 \,/\, 2{,}4\%)$

zu c) $\sin(1{,}57) \approx \sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \quad (0{,}9999997 \,/\, 3 \cdot 10^{-5}\%)$

zu d) $\sin(1{,}82) = \cos(\frac{\pi}{2} - 1{,}82) \approx \cos(1{,}57 - 1{,}82) = \cos(0{,}25) \approx 1 - \frac{0{,}25^2}{2} = 0{,}96875$ $(0{,}96911 \,/\, 0{,}04\%)$

zu e) $\sin(2{,}94) = \sin(\pi - 2{,}94) \approx \sin(3{,}14 - 2{,}94) = \sin(0{,}2) \approx 0{,}2 \quad (0{,}20023 \,/\, 0{,}11\%)$

zu f) $\cos(0{,}4) \approx 1 - \frac{0{,}4^2}{2} = 0{,}92 \quad (0{,}92106 \,/\, 0{,}12\%)$

zu g) $\cos(1{,}37) = \sin(\frac{\pi}{2} - 1{,}37) \approx \sin(1{,}57 - 1{,}37) = \sin(0{,}2) \approx 0{,}2 \quad (0{,}19945 \,/\, 0{,}3\%)$

zu h) $\cos(1{,}57) \approx \cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \quad (0{,}00080)$

zu i) $\cos(1{,}97) = \sin(\frac{\pi}{2}-1{,}97) \approx \sin(1{,}57-1{,}97) = -\sin(0{,}4) \approx -0{,}4$
$(-0{,}38868\ /\ 2{,}8\,\%)$

zu j) $\cos(2{,}47) = -\cos(\pi-2{,}47) \approx -\cos(3{,}14-2{,}47) \approx -(1-\frac{0{,}67^2}{2}) = -0{,}77555$
$(-0{,}78283\ /\ 0{,}9\,\%)$

Die Summe aller Werte ganzzahlig gerundet ist 3 (AN)

❷ Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2\cdot\sin(\frac{\pi}{2}\cdot x)+2$. Skizziere die Funktion im Intervall $0 \le x \le 10$ und stelle fest, ob die folgenden Punkte auf oder *nahe* (d.h. $|f(x)-y|<0{,}05$) dem Graphen der Funktion liegen:

a) $(0|0)$ b) $(2|0)$ c) $(2|2)$ d) $(0|2)$ e) $(1|4)$

f) $(1|2)$ g) $(3|0)$ h) $(5|0)$ i) $(\frac{1}{3}|3)$ j) $(\frac{2}{3}|1)$

__Lösung__

zu a) $f(0) = 2\cdot\sin(\frac{\pi}{2}\cdot 0)+2 = 2 \neq 0$, also nicht auf dem Graph.

zu b) $f(2) = 2\cdot\sin(\frac{\pi}{2}\cdot 2)+2 = 2 \neq 0$, also nicht auf dem Graph.

zu c) $f(2) = 2$ (siehe b)), also auf dem Graphen.

zu d) $f(0) = 2$ (siehe a)), also auf dem Graphen.

zu e) $f(1) = 2\cdot\sin(\frac{\pi}{2})+2 = 4$, also auf dem Graphen.

zu f) $f(1) \neq 2$ (siehe e)), also nicht auf dem Graphen.

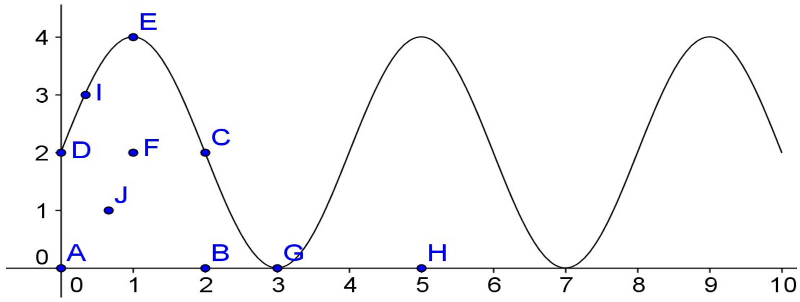
Zu g) $f(3) = 2\cdot\sin(\frac{\pi}{2}\cdot 3)+2 = 0$, also auf dem Graphen

zu h) $f(5) = 2\cdot\sin(\frac{\pi}{2}\cdot 5)+2 = 4 \neq 0$, also nicht auf dem Graphen

zu i) $f(\frac{1}{3}) = 2\cdot\sin(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{3})+2 = 3$, also auf dem Graphen.

Zu j) $f(\frac{2}{3}) = 2\cdot\sin(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{3})+2 = \sqrt{3}+2 \neq 1$ also nicht auf dem Graphen

Die Anzahl obiger Punkte auf dem Graphen ist 5 (LE).



❸ In jedem Dreieck ist das Verhältnis der Längen zweier Dreiecksseiten gleich dem Verhältnis der Sinuswerte der gegenüberliegenden Winkel (**Sinussatz**), d.h.

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}\ ;\ \frac{b}{c}=\frac{\sin(\beta)}{\sin(\gamma)}\ ;\ \frac{c}{a}=\frac{\sin(\gamma)}{\sin(\alpha)}$$

Berechne die fehlenden Seiten und Winkel nach dem Sinussatz

a) $\alpha=0{,}1\ ,\ \beta=0{,}07\ ,\ a=5\,cm$

b) $\beta=0{,}57\ ,\ \gamma=0{,}2\ ,\ b=1\,m$

c) $\gamma=0{,}2\ ,\ \alpha=1{,}77\ ,\ c=30\,mm$

Lösung

zu a)

$$\gamma=\pi-(\alpha+\beta)\approx 3{,}14-(0{,}1+0{,}07)=2{,}97$$

$$b=a\cdot\frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)}\approx 5\cdot\frac{0.07}{0.1}=3{,}5\,cm$$

$$c=a\cdot\frac{\sin(\gamma)}{\sin(\alpha)}=5\cdot\frac{\sin(2.97)}{\sin(0.1)}=5\cdot\frac{\sin(3{,}14-2.97)}{\sin(0.1)}\approx 5\cdot\frac{0{,}17}{0{,}1}=8{,}5\,cm$$

zu b)

$$\alpha=\pi-(\beta+\gamma)\approx 3{,}14-(0{,}57+0{,}2)=2{,}37$$

$$a=b\cdot\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}\approx 1\cdot\frac{\sin(3{,}14-2.37)}{\sin(0.57)}=\frac{\cos(1{,}57-0{,}77)}{\cos(1{,}57-0{,}57)}\approx\frac{0{,}68}{0{,}5}=1{,}36\,m$$

$$c=b\cdot\frac{\sin(\gamma)}{\sin(\beta)}=1\cdot\frac{\sin(0{,}2)}{\sin(0{,}57)}\approx\frac{\sin(0{,}2)}{\cos(1{,}57-0{,}57)}\approx\frac{0{,}2}{0{,}5}=0{,}4\,m$$

zu c)

$$\beta=\pi-(\alpha+\gamma)\approx 3{,}14-(1{,}77+0{,}2)=1{,}17$$

$$a=c\cdot\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)}\approx 30\cdot\frac{\sin(1{,}77)}{\sin(0.2)}=30\cdot\frac{\cos(1{,}57-1{,}77)}{\sin(0{,}2)}\approx 30\cdot\frac{0{,}98}{0{,}2}=147\,mm$$

$$b=c\cdot\frac{\sin(\beta)}{\sin(\gamma)}=30\cdot\frac{\sin(1{,}17)}{\sin(0.2)}=30\cdot\frac{\cos(1{,}57-1{,}17)}{\sin(0{,}2)}\approx 30\cdot\frac{0{,}92}{0{,}2}=138\,mm$$

Die Summe aller berechneten Werte ganzzahlig gerundet ist 305 (GE)

❹ In einem Dreieck ist das Quadrat einer Seitenlänge gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seitenlängen, vermindert um das doppelte Produkt aus diesen Seitenlängen und dem Kosinus des eingeschlossenen Winkels (**Kosinussatz**), d.h.

$$a^2 = b^2+c^2-2bc\cdot\cos(\alpha) \;;\; b^2 = c^2+a^2-2ca\cdot\cos(\beta) \;;\; c^2 = a^2+b^2-2ab\cdot\cos(\gamma) \quad .$$

Berechne die fehlenden Seiten und Winkel mit dem Kosinussatz und wenn angebracht mit dem Sinussatz

a) $a = 8\,mm \,;\, b = 21\,mm \,;\, \gamma = 0{,}57$

b) $b = 6\,m \,;\, c = 16\,m \,;\, \alpha = 1{,}07$

c) $c = 4\,cm \,;\, a = 15\,cm \,;\, \beta = 1{,}97$

<u>Lösung</u>

zu a)

$$c^2 = a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos(\gamma) = 8^2+21^2-2\cdot 8\cdot 21\cdot\cos(0{,}57) \approx 223{,}58 \Rightarrow c \approx 15\,mm$$

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c}\cdot\sin(\gamma) = \frac{8}{15}\cdot\sin(0{,}57) \approx \frac{8}{15}\cdot\cos(1{,}57-0{,}57) \approx \frac{8}{15}\cdot\frac{1}{2} = 0{,}27 \Rightarrow \alpha \approx 0{,}27$$

$$\beta = \pi-(\alpha+\gamma) \approx 3{,}14-(0{,}57+0{,}27) = 2{,}3$$

zu b)

$$a^2 = b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos(\alpha) = 6^2+16^2-2\cdot 6\cdot 16\cdot\cos(1{,}07)$$

$$\approx 36+256-192\cdot\sin(1{,}57-1{,}07) \approx 196 \Rightarrow a = 14\,m$$

$$\sin(\beta) = \frac{b}{a}\cdot\sin(\alpha) = \frac{6}{14}\cdot\sin(1{,}07) \approx \frac{6}{14}\cdot\cos(1{,}57-1{,}07) \approx 0{,}38 \Rightarrow \beta \approx 0{,}38$$

$$\gamma = \pi-(\alpha+\beta) \approx 3{,}14-(1{,}07+0{,}38) = 1{,}69$$

zu c)

$$b^2 = a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\cos(\beta) = 15^2+4^2-2\cdot 15\cdot 4\cdot\cos(1{,}97)$$

$$\approx 225+16-129\cdot\sin(1{,}57-1{,}97) \approx 292{,}6 \Rightarrow b \approx 17\,cm$$

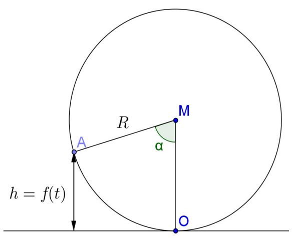
$$\sin(\gamma) = \frac{c}{b}\cdot\sin(\beta) = \frac{4}{17}\cdot\sin(1{,}97) \approx \frac{4}{17}\cdot\cos(1{,}57-1{,}97) \approx 0{,}22 \Rightarrow \gamma \approx 0{,}22$$

$$\alpha = \pi-(\beta+\gamma) \approx 3{,}14-(1{,}97+0{,}22) = 0{,}95$$

Die Summe aller berechneten Werte ganzzahlig gerundet ist 52 (ST)

❺ Das *London Eye* ist mit einer Höhe von 135 m das höchste Riesenrad in ganz Europa. Für eine Umdrehung benötigt es etwa 35 Minuten. Stelle einen Funktionsterm $f(t)$ auf, der die Höhe einer Gondel (in m) in Abhängigkeit von der Zeit (in min) angibt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich die Gondel am Boden, d.h. $f(0) = 0$.

<u>Lösung</u>



Die funktionale Abhängigkeit von Höhe und Winkel ist:

$$h(\alpha) = R - R\cdot\cos(\alpha) = R\cdot(1-\cos(\alpha)) = \frac{135}{2}\cdot(1-\cos(\alpha))$$

Die Abhängigkeit zwischen Winkel und Zeit IST $\alpha(t) = \frac{2\pi}{35}\cdot t$, denn der Winkel verändert sich linear mit der Zeit und nach 35 Minuten ist eine Umdrehung, d.h der Winkel 2π geschafft.

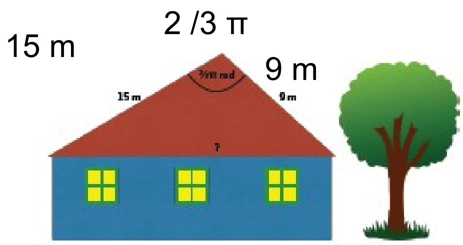
Beide Funktionsansätze zusammengenommen ergeben dann:

$$f(t) = h(\alpha(t)) = \frac{135}{2}\cdot\left(1-\cos\left(\frac{2\pi}{35}\cdot t\right)\right)$$

Der in einer Minute zurückgelegte Winkel (in ° und ganzzahlig gerundet) ist 10 (EL).

❻ Das Dach eines Hauses misst auf einer Seite 15 m, auf der anderen 9 m. Der Winkel des Daches im First beträgt $\frac{2}{3}\pi$.

Berechne die Breite des Daches mit dem Kosinussatz



<u>*Lösung*</u>

Nach dem Kosinussatz gilt für die Breite c

$$c^2 = 15^2+9^2-2\cdot15\cdot9\cdot\cos\left(\frac{2}{3}\cdot\pi\right) = 225+81-270\cdot\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)$$

Weiterhin gilt $\cos\left(\frac{2}{3}\cdot\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\cdot\pi\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

Also $c^2 = 225+81+135 = 441 \Rightarrow c = \sqrt{441} = 21$

Die Breite des Daches ist 21 m (LE).

Lösungen mit Kennsilben

20 NG	11 RI	305 GE	4 RE	3 AN	10 EL	2 TT	5 LE	21 LE	49 GS	52 ST	307 UN

Lösungswort: ANLEGESTELLE

❼ <u>Expertenaufgabe</u>

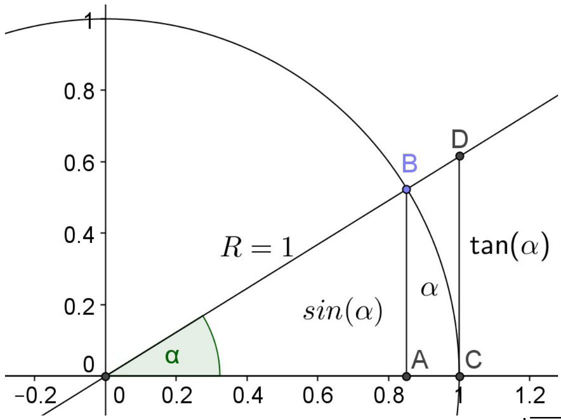
Wie in der Vorbemerkung gesagt lässt sich $\sin(\alpha)$ mit α im Bogenmaß für kleine Winkel gut durch α abschätzen.

Zeige am Einheitskreis (Kreis mit Radius 1) geometrisch, dass gilt:

$$\alpha\cdot\sqrt{1-\alpha^2} \leq \sin(\alpha) \leq \alpha \quad .$$

Entwickle auf der Grundlage obiger Ungleichungen eine Funktion $f(\alpha)$ als Abschätzung des relativen Fehlers, d.h. $f(\alpha) \geq \left|\frac{\alpha-\sin(\alpha)}{\alpha}\right|$ in % im Interval $[0;0{,}5]$

<u>*Lösung.*</u>



Im Einheitskreis gilt für die Längen der Strecken $|\overline{AB}| = \sin(\alpha)$ und $|\overline{CD}| = \tan(\alpha)$
Das Kreisbogenstück vom Punkt C zum Punkt B hat die Länge α . Seine Länge kann abgeschätzt werden durch:

(i) $\sin(\alpha) \leq \alpha$ und (ii) $\alpha \leq \tan(\alpha)$

Es gilt $\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ und für $\alpha < \dfrac{\pi}{2}$ ist $\cos(\alpha) = \sqrt{1-\sin^2(\alpha)}$.

Deswegen kann man wegen (i) für $\alpha < 1$ abschätzen:

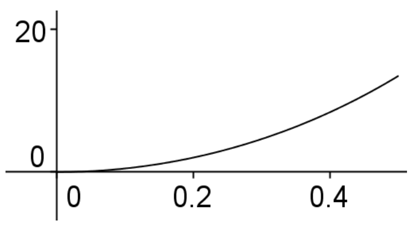
$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}} \leq \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{1-\alpha^2}}$$

Also folgt aus (ii): $\alpha \leq \tan(\alpha) \leq \dfrac{\sin(\alpha)}{\sqrt{1-\alpha^2}} \Rightarrow \alpha \cdot \sqrt{(1-\alpha^2)} \leq \sin(\alpha)$, woraus sich zusammen mit (i) die behaupteten Ungleichungen ergeben.

Der relative Fehler in %, den man bei einer Annäherung von $\sin(\alpha)$ durch α bei kleinen Winkeln macht, ist $\left|\dfrac{\alpha-\sin(\alpha)}{\alpha}\right| \cdot 100\ \%$.

Aus den soeben bewiesenen Ungleichungen kann man aber ableiten:

$$\begin{aligned}
&\alpha \cdot \sqrt{1-\alpha^2} \leq \sin(\alpha) \leq \alpha \\
\Leftrightarrow\ & -\alpha \cdot \sqrt{1-\alpha^2} \geq -\sin(\alpha) \geq -\alpha \\
\Leftrightarrow\ & \alpha - \alpha \cdot \sqrt{1-\alpha^2} \geq \alpha - \sin(\alpha) \geq \alpha - \alpha \\
\Leftrightarrow\ & \alpha \cdot (1-\sqrt{1-\alpha^2}) \geq \alpha - \sin(\alpha) \geq 0 \\
\Leftrightarrow\ & ((1-\sqrt{1-\alpha^2})) \cdot 100 \geq \frac{\alpha-\sin(\alpha)}{\alpha} \cdot 100 \geq 0
\end{aligned}$$



Die obige Abschätzung zeigt, dass die Abweichung zwischen α und $\sin(\alpha)$ für $0 \leq \alpha \leq 0{,}5$ höchstens 13,3 % beträgt. Für α's am linken Intervallrand ist die Näherung erheblich besser und es ist nicht ausgeschlossen, dass sie auch am rechten Intervallrand besser ist.