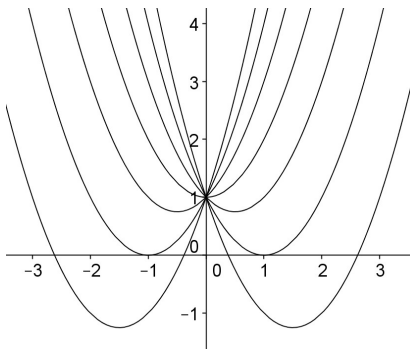
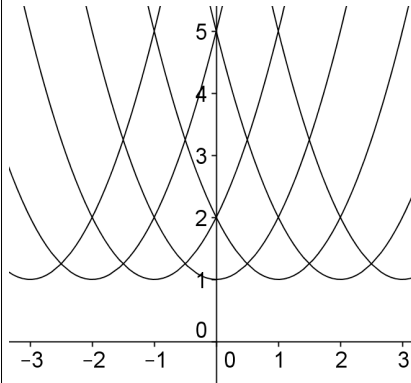




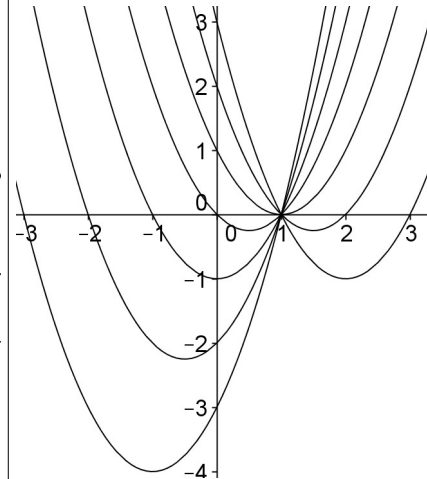
1 a)



b)



c)



Bei den obigen Abbildungen handelt es sich um Kurvenscharen gebildet aus Normalparabeln in unterschiedlichen Lagen im Koordinatensystem.

Ordne den Graphen die richtige Funktionsvorschrift zu:

- 1)  $f(x) = x^2 + 2ax + (a^2 + 1)$
- 2)  $f(x) = x^2 - (a + 1)x + a$
- 3)  $f(x) = x^2 + a \cdot x + 1$

### Lösung

zu 1)

Die Funktionsgleichung lässt sich schreiben als  $f(x) = (x + a)^2 + 1$ , d.i. die Scheitelpunktdarstellung mit dem Scheitelpunkt  $S(-a | 1)$ . Dieser liegt für alle Kurven auf einer Parallelen zur x-Achse im Abstand 1. Dem entspricht Bild b)

zu 2)

Die Funktionsgleichung lässt sich umformen in  $f(x) = (x - a) \cdot (x - 1)$ . Dem entspricht eine Kurvenschar von Normalparabeln, die alle eine Nullstelle bei  $x = 1$  haben. Dem entspricht Bild c)

zu 3)

Aus der Funktionsgleichung kann man entnehmen, dass alle Kurven die y-Achse bei  $y = 1$  schneiden. Dem entspricht Bild a).

Die Positions-Nrn. in der richtigen Reihenfolge ergeben die Lösungszahl 312 (GR).

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.



2 Bestimme die Bahnkurven der Scheitelpunkte obiger Kurven.

Lösung

zu 1)

Die Funktionsgleichung in der Scheitelpunktdarstellung ist  $f(x) = (x+a)^2 + 1$ , d.h. der Scheitelpunkt hat die Koordinaten  $S(-a|1)$ . Die x-Komponente des Punktes durchläuft alle reellen Zahlen und die zugehörige y-Komponente ist immer 1. Der Scheitelpunkt liegt also auf dem Graphen der Funktion  $g(x) = 1$ , d.h. eine Parallele zur x-Achse im Abstand 1.

zu 2)

Die Funktionsgleichung in der Scheitelpunktdarstellung ist

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - (a+1)x + \left(\frac{a+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{a+1}{2}\right)^2 + a = \left(x - \frac{a+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{a^2 + 2a + 1}{4} - \frac{4a}{4}\right) \\ &= \left(x - \frac{a+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{a^2 - 2a + 1}{4}\right) = \left(x - \frac{a+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

d.h. der Scheitelpunkt hat die Koordinaten  $S\left(\frac{a+1}{2} \mid -\left(\frac{a-1}{2}\right)^2\right)$ . Setzen wir

$$x = \frac{a+1}{2} \Leftrightarrow a = 2x - 1, \text{ so kann man die zugehörige y-Komponente darstellen als}$$

$$y = -\left(\frac{2x-1-1}{2}\right)^2 = -(x-1)^2. \text{ Bei beliebigem reellen } a \text{ durchläuft } x \text{ alle reellen}$$

Zahlen. Der funktionale Zusammenhang beider Komponenten zur Bahnkurve ist

$$g(x) = -(x-1)^2.$$

zu 3)

Die Funktionsgleichung in der Scheitelpunktdarstellung ist

$$f(x) = x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a^2}{4} - 1\right)$$

d.h. der Scheitelpunkt hat die Koordinaten  $S\left(-\frac{a}{2} \mid -\left(\frac{a^2}{4} - 1\right)\right)$ . Setzen wir

$$x = -\frac{a}{2} \Leftrightarrow a = -2x, \text{ so kann man die zugehörige y-Komponente darstellen als}$$

$$y = -\left(\frac{4x^2}{4} - 1\right) = -x^2 + 1. \text{ Bei beliebigem reellen } a \text{ durchläuft } x \text{ alle reellen}$$

Zahlen. Der funktionale Zusammenhang beider Komponenten zur Bahnkurve ist

$$g(x) = -x^2 + 1.$$

Die Summe der Funktionswerte aller Bahnkurven an der Stelle  $x = 1$  ist  $1 + 0 + 0 = 1$  (IE)

3 Betrachte die Kurvenschar  $y = \frac{x^2}{2c} + \frac{c}{2}$  mit dem Parameter  $c (\neq 0)$ .

Skizziere die zugehörige Kurvenschar!

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.



## Lösung

Zunächst kann man feststellen, dass alle Kurven der Kurvenschar spiegelsymmetrisch zur y-Achse liegen und ihren Scheitelpunkt auf der y-Achse bei  $y = \frac{c}{2}$  haben.

Durch Umformungen erhält man

$$y = \frac{x^2}{2c} + \frac{c}{2} \Rightarrow 2cy = x^2 + c^2 \Rightarrow 2cy - 2xc = x^2 + 2xc + c^2 \Rightarrow 2c(y-x) = (x+c)^2$$

Da das Quadrat auf der rechten Seite der letzten Gleichung immer  $\geq 0$  ist, kann man aus ihr schließen  $2c(y-x) \geq 0$ , d.h. wenn  $c > 0$  ist, dann muss für alle Punkte der Graphen gelten  $y \geq x$ . Wenn  $c < 0$ , dann heißt das  $y \leq x$ .

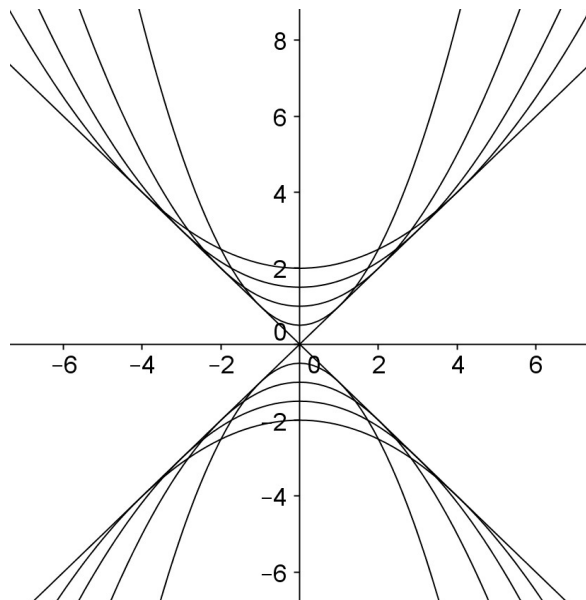
Die Punktmenge mit  $y \geq x$  ist der Sektor um die y-Achse, der links und rechts von den Geraden  $y_1(x) = x$  und  $y_2(x) = -x$  eingefasst wird und zwar für  $c > 0$  oberhalb der x-Achse und für  $c < 0$  unterhalb der x-Achse.

Man kann die Frage stellen, ob die Kurven diese Berandungsgeraden berühren, d.h.

gibt es  $P(x|y)$  mit  $y = x$  und  $y = \frac{x^2}{2c} + \frac{c}{2}$ , d.h. ist die Gleichung  $x = \frac{x^2}{2c} + \frac{c}{2}$

lösbar? Es ist  $x = \frac{x^2}{2c} + \frac{c}{2} \Leftrightarrow 0 = x^2 - 2xc + c^2 = (x-c)^2$ , d.h. die Gleichung ist

lösbar mit der einzigen Lösung  $x = c$ . Das zugehörige y ist  $y = c$ , d.h. die Kurven haben im Punkt  $T_1(c|c)$  die Tangente  $y = x$ . Analog kann man nachweisen, dass  $y = -x$  die Tangente am Punkt  $T_2(-c|c)$  ist.



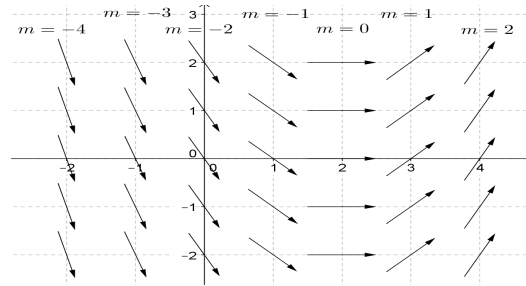
Die Anzahl der Bahnkurven durch den Punkt  $P(2|1)$  ist 0 (CH).

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.



- 4 Gegeben ist das nebenstehende „Richtungsfeld“, d.h. allen Punkten der Ebene  $P(x|y)$  wird eine Steigung  $m$  zugeordnet.

Finde eine Kurvenschar  $f_a(x)$  aus Polynomen möglichst kleinen Grades, so dass  $y = f_a(x)$  und  $m = f_a'(x)$  ist.



### Lösung

Ein Polynom 1. Grades (eine Gerade) kommt nicht in Frage. Also machen wir einen Ansatz mit einem Polynom zweiten Grades  $f_a(x) = a_1x^2 + a_2x + a_3$  mit der Ableitung  $f_a'(x) = 2 \cdot a_1 \cdot x + a_2$ . Wenn ein solcher Graph ins Richtungsfeld passen soll, muss sein

$$\begin{aligned} f_a'(-2) &= 2 \cdot a_1 \cdot (-2) + a_2 = -4 && \Leftrightarrow -4 \cdot a_1 + a_2 = -4 \\ f_a'(-1) &= 2 \cdot a_1 \cdot (-1) + a_2 = -3 && \Leftrightarrow -2 \cdot a_1 + a_2 = -3 \\ f_a'(0) &= 2 \cdot a_1 \cdot 0 + a_2 = -2 && \Leftrightarrow a_2 = -2 \\ f_a'(1) &= 2 \cdot a_1 \cdot 1 + a_2 = -1 && \Leftrightarrow 2 \cdot a_1 + a_2 = -1 \\ f_a'(2) &= 2 \cdot a_1 \cdot 2 + a_2 = 0 && \Leftrightarrow 4 \cdot a_1 + a_2 = 0 \\ f_a'(3) &= 2 \cdot a_1 \cdot 3 + a_2 = 1 && \Leftrightarrow 6 \cdot a_1 + a_2 = 1 \\ f_a'(4) &= 2 \cdot a_1 \cdot 4 + a_2 = 2 && \Leftrightarrow 8 \cdot a_1 + a_2 = 2 \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem ist mit  $a_1 = \frac{1}{2}$  und  $a_2 = -2$  lösbar.

Also erfüllen alle Funktionen  $f_a(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + a$  mit beliebiger additiver Konstanten  $a$  die Richtungsbedingung. Dieselbe Kurvenschar lässt sich auch durch die Kurvenschar  $f_c(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 + c$  beschreiben, denn jede Kurve der einen Menge findet sich über den Zusammenhang  $c = a - 2$  auch als Kurve der anderen Menge.

*Der Faktor bei der höchsten x-Potenz ist 0,5 (EN)*

- 5 Gegeben ist eine Kurvenschar  $f_a$  mit  $f_a(x) = \frac{a+x}{e^x}$  mit  $a \geq 0$ .

Ermittle

- \* die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen,
- \* die Extrempunkte,
- \* die Wendepunkte.

Stelle die Gleichung der Wendetangente  $t_a(x)$  auf.

Die Koordinatenachsen und die Wendetangente bestimmen ein Dreieck. Bestimme seine Fläche  $F = F(a)$  und ermittle, bei welchem  $a$  die Fläche maximal wird.



### Lösung

Der Schnittpunkt mit der x-Achse liegt bei der Stelle  $x_0$  mit  $0 = \frac{a+x_0}{e^{x_0}} \Leftrightarrow x_0 = -a$ ,

ist also der Punkt  $P(-a|0)$ .

Der Schnittpunkt mit der y-Achse liegt bei der Stelle  $x = 0$ , ist also der Punkt  $P(0|a)$ .

Die Ableitungen der Funktion sind (mit Quotientenregel):

$$f_a'(x) = \frac{e^x - e^x \cdot (a+x)}{e^{2x}} = \frac{1-a-x}{e^x} \quad \text{und} \quad f_a''(x) = \frac{-e^x - e^x \cdot (1-a-x)}{e^{2x}} = \frac{-2+a+x}{e^x}.$$

$$f_a'''(x) = \frac{e^x - e^x \cdot (-2+a+x)}{e^{2x}} = \frac{3-a-x}{e^x}$$

Die notwendige Bedingung für Extremstellen ist  $f_a'(x) = \frac{1-a-x}{e^x} = 0$ , also ist

$x_0 = 1-a$ . Ob es sich um ein Extremum handelt und um welches, kann die 2.

Ableitung entscheiden. Es ist  $f_a''(1-a) = \frac{-2+a+1-a}{e^{1-a}} = -\frac{1}{e^{1-a}} < 0$ , also liegt ein

Maximum vor und der Hochpunkt ist  $P(1-a|\frac{1}{e^{1-a}})$ .

Die notwendige Bedingung für Wendestellen ist  $f_a''(x) = 0$ ,

also hier:  $-2+a+x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2-a$ . Ist zusätzlich  $f_a'''(x_0) \neq 0$ , ist eine hinreichende Bedingung für eine Wendestelle gegeben. Das ist hier wegen

$$f_a'''(2-a) = \frac{3-a-(2-a)}{e^{2-a}} = \frac{1}{e^{2-a}} \neq 0 \quad \text{der Fall.}$$

Der Wendepunkt hat die Koordinaten  $P(2-a|2 \cdot e^{a-2})$ , die Steigung im Wendepunkt ist  $f_a'(2-a) = -e^{a-2}$ , also lautet die Wendetangente:

$$t_a(x) = -e^{a-2} \cdot (x - (2-a)) + 2 \cdot e^{a-2} = e^{a-2} \cdot (4-a-x)$$

Diese Wendetangente schneidet die x- und y-Achse in den Punkten

$(4-a|0)$  und  $(0|e^{a-2} \cdot (4-a))$ , also wird ein Dreieck eingeschlossen, dass die

Fläche hat  $F(a) = \frac{(4-a)^2 \cdot e^{a-2}}{2}$ .

Extremwerte hat diese Fläche bei den a's, an denen gilt:

$$F'(a) = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot (a-4) \cdot e^{a-2} + (4-a)^2 \cdot e^{a-2}) = \frac{e^{a-2}}{2} \cdot (a-4) \cdot (a-2) = 0$$

Man erkennt die möglichen Nullstellen, nämlich  $a_1 = 4$  und  $a_2 = 2$ .

Um welche Art von Stellen es sich handelt, kann nach dem entsprechenden hinreichenden Kriterium für Maxima und Minima die 2. Ableitung an diesen Stellen entscheiden. Diese ist

$$F''(a) = \frac{1}{2} \cdot (e^{a-2} \cdot ((a^2 - 6a + 8) + 2a - 6)) = \frac{e^{a-2}}{2} \cdot (a^2 - 4a + 2)$$

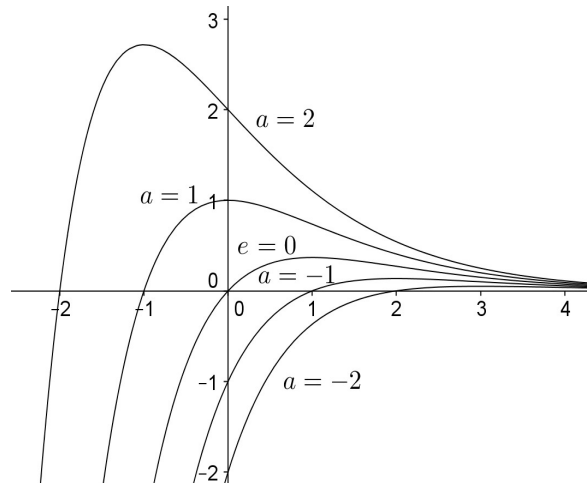
Wegen  $F''(2) = \frac{1}{2} \cdot (-2) = -1 < 0$  liegt bei 2 ein Maximum und

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.



wegen  $F''(4) = \frac{e^2}{2} \cdot 2 = e^2 > 0$  bei 4 ein Minimum.

Setzen wir in die Flächenformel  $a = 2$  ein, so erhält man  $F(2) = 2$ .



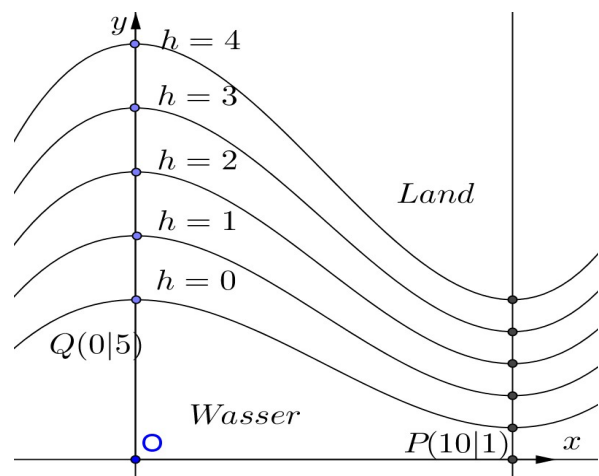
Die Größe der Fläche ist 2 (LA).

6 Die Höhenlinien (d.s. Kurven gleicher Höhe)eines Abhangs zum Wasser hin stellen sich wie in der nebenstehenden Zeichnung als Graphen einer Kurvenschar von Polynomen 3.Grades dar.

Aus der Sicht von oben ist -jeweils linear- der flachste Anstieg von  $(0|5)$  bis  $(0|13)$  und der steilste von  $(10|1)$  bis  $(10|5)$ .

Ermittle die Kurvenschar in der  $(x/y)$ -Ebene, die den Höhenlinienverlauf beschreibt, wobei die angegebene Höhe  $h$  mit dem entsprechenden Parameter übereinstimmen soll.

Bei  $x=5$  und  $h=5$  ist  $y=$  \_\_\_\_.



### Lösung

Der Ansatz ist ein Polynom dritten Grades  $f_h(x) = a(h) \cdot x^3 + b(h) \cdot x^2 + c(h) \cdot x + d(h)$  mit der Ableitung  $f_h'(x) = 3a(h) \cdot x^2 + 2b(h) \cdot x + c(h)$ .

Die zu erfüllenden Bedingungen sind:

(1)  $f_h(0) = d(h) = 5 + 2h$

(2)  $f_h'(0) = 3a(h) \cdot 0 + 2b(h) \cdot 0 + c(h) = 0 \Rightarrow c(h) = 0$

(3)  $f_h(10) = a(h)10^3 + b(h)10^2 + (5 + 2h) = 1 + h \Rightarrow 1000a(h) + 100b(h) = -4 - h$

(4)  $f_h'(10) = 300a(h) + 20b(h) = 0$

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.



Aus den Gleichungen (3) und (4) folgt:  $a(h) = \frac{4+h}{500}$  und  $b(h) = -\frac{3}{100} \cdot (4+h)$

Also insgesamt

$$f_h(x) = \frac{4+h}{500} \cdot x^3 - \frac{3 \cdot (4+h)}{100} \cdot x^2 + 5 + 2h$$

Bei  $x=5$  und  $h = 5$  ist  $y=10,5$  (ND).

### Lösungen mit Kennsilben

10,5 ND	0,5 EN	0,4 LO	11 KI	2 LA	312 GR	0,1 SA	3 ES	0 CH	123 TH	4 NI	1 IE
------------	-----------	-----------	----------	---------	-----------	-----------	---------	---------	-----------	---------	---------

Lösungswort: GRIECHENLAND

### 7 Expertenaufgabe

Man kann die Kurvenschar  $y=x^2+c$  auch explizit nach  $c$  hin auflösen, d.h.

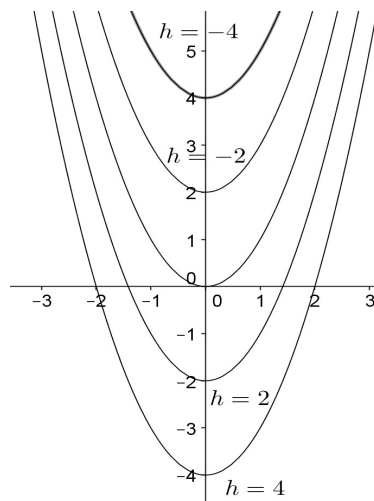
$c = x^2 - y$  und dann  $c$  als eine Funktion des Punktes  $(x|y)$  auffassen, also

$c = F(x, y)$ . Wenn man dann den  $F(x,y)$ -Wert auf einer dritten Achse, die im dreidimensionalen Raum senkrecht auf der  $(x/y)$ -Ebene steht, aufträgt, liegen die Punkte  $P(x|y|F(x, y))$  auf einer gewölbten Fläche in diesem Raum.

Stelle fest, wie diese Fläche in obigem Beispiel aussieht und skizziere sie, indem du entsprechende Höhenlinien zeichnest.

Stell Dir vor, Du befindest Dich auf der Höhenlinie  $c = 0$  im Punkt  $P(1|1|0)$ . Bestimme die Richtung in der  $xy$ -Ebene des steilsten Abstiegs zur Höhenlinie mit dem Parameter  $c = -1$ .

### Lösung



Es handelt sich um eine Kerbe, die in Richtung der positiven  $y$ -Achse abfällt und zu den Rändern hin aufsteigt.

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.



Vom Punkt  $P(1|1|0)$  ist der steilste Abstieg zu einem Punkt  $Q(x|y|-1)$  dort, wo die Entfernung  $d$  beider Punkte kürzestmöglich ist, d.h.

$d = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + 1}$  muss minimal werden, das ist wegen  $-1 = x^2 - y$  gleichbedeutend mit der Bedingung, dass  $g(x) := d^2 = (x-1)^2 + x^4 + 1$  minimal wird.

Die Ableitung ist  $g'(x) = 2(x-1) + 4x^3$  und die Nullstellen müssen die Gleichung erfüllen  $0 = x - 1 + 2x^3 \Leftrightarrow 0 = x^3 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ .

Die Gleichung hat genau eine Nullstelle  $x_0 \approx 0,59$ .

Diese Nullstelle zumindest näherungsweise zu finden, überlasse ich Euch.

Es gibt eine Formel für Polynome der Gestalt  $x^3 + px + q = 0$ , nämlich die

Cardano-Tartaglia-Formel  $x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}$ , mit der man sie

sogar genau bestimmen kann.

In diesem Fall könnte man auch die Fixpunkt-Iteration anwenden, die auf der Basis

der Umformung  $x^3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x}$  bedeutet:  $x_{n+1} = \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_n}$ . Bei

einem Startwert von  $x_0 = 0$  kommt man nach ein paar Iterationsschritten zu obiger Näherung. Auch andere Näherungen (Regula falsi, Newton-Iteration u.a.) sind möglich.

Aus  $-1 = x^2 - y \Leftrightarrow y = x^2 + 1$  findet man dann  $y_0 \approx 1,35$  und der Richtungsvektor in der  $xy$ -Ebene ist schließlich  $\begin{pmatrix} -0,41 \\ 0,35 \end{pmatrix}$

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.