Fit in Mathe

Musterlösungen 1

Juni Klassenstufe 12

Thema **Wahrscheinlichkeitsrechnung**

❶ In einer Urne befinden sich 5 blaue (B), 4 rote (R) und 3 gelbe (G) Kugeln.
Es wird ohne Zurücklegen eine blaue, eine rote und eine gelbe Kugel entnommen.
Bestimme

a) die Anzahl aller Möglichkeiten 3 Kugeln aus einer Urne mit 12 Kugeln zu entnehmen,

b) die Anzahl der Möglichkeiten für obige Kombination,

c) den Quotienten der Anzahlen aus b) und a),

d) die Wahrscheinlichkeit obiger Kombination mittels des Wahrscheinlichkeitsbaumes.

Lösung

zu a)

Für die erste Kugel gibt es 12 Möglichkeiten, für die zweite noch 11 und für die dritte noch 10 und da wir nicht unterscheiden wollen, wenn wir dieselben Kugeln in anderer Reihenfolge ziehen, müssen wir diese Anzahl der Möglichkeiten durch die Anzahl der Vertauschungsmöglichkeiten (Permutationen) der drei Kugeln dividieren. Das sind aber $3 \cdot 2 (=: 3!)$, also haben wir $\frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2} = \frac{12!}{9! \cdot 3!} (=: \binom{12}{3})$

Möglichkeiten.

zu b)

Die Anzahl der Möglichkeiten, obige Kombination zu ziehen, ist $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$, denn jede blaue (davon gibt es 5) kann mit jeder roten (davon 4) und jeder gelben (davon 3) kombiniert sein.

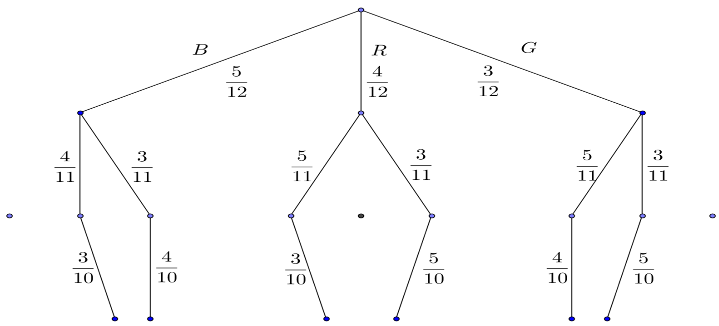
zu c)

Der Quotient ist nach a) und b) gleich $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{\binom{12}{3}} = \frac{(5 \cdot 4 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 2)}{12 \cdot 11 \cdot 10} = \frac{3}{11}$.

Das ist aber auch die Wahrscheinlichkeit dafür, die obige Farbenkombination aus der Urne zu ziehen, denn die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist

$$\frac{\textit{die Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\textit{die Anzahl sämtlicher Ergebnisse}} .$$

zu d)



In obigem Wahrscheinlichkeitsbaum sind nur die relevanten Pfade eingetragen. Die Wahrscheinlichkeiten für die Enden eines Pfade ergeben sich als Produkt der Wahrscheinlichkeiten der Einzelpfade, die zu ihm geführt haben. Die Summe dieser Wahrscheinlichkeiten ergibt die Wahrscheinlichkeit des beschriebenen Ereignisses, also

$$\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{3}{10}+\frac{5}{12}\cdot\frac{3}{11}\cdot\frac{4}{10}+\frac{4}{12}\cdot\frac{5}{11}\cdot\frac{3}{10}+\frac{4}{12}\cdot\frac{3}{11}\cdot\frac{5}{10}+\frac{3}{12}\cdot\frac{5}{11}\cdot\frac{4}{10}+\frac{3}{12}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{5}{10}$$

$$=6\cdot\frac{5\cdot4\cdot3}{12\cdot11\cdot10}=\frac{3}{11}$$

d.h. dasselbe Ergebnis wie unter c)

Die Wahrscheinlichkeit als ganzzahlig gerundete Prozentzahl ist 27 %

❷ Kirmes in Stade

In einer Urne an der größten Losbude der Stader Kirmes befinden sich fünf Gewinne im Wert von 50 Cent, drei im Wert von 1 € und zwei im Wert von 2 €. Einmal ziehen kostet 1 €. Zweimal ziehen kostet 1,50 €.

Du kannst nicht widerstehen und ziehst nacheinander zwei Lose aus der Urne und addierst den Wert der gewonnenen Preise.

a) Gib die Ergebnismenge S für dieses zweistufige Zufallsexperimemt an.

b) Bestimme den Erwartungswert μ für den Wert der gewonnenen Preise bei einmaligem Ziehen.

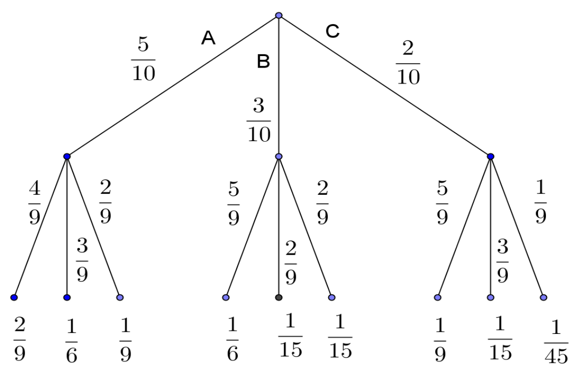
c) Wie groß ist der Erwartungswert bei zweimaligem Ziehen (ohne Zurücklegen) ?

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Wert der gewonnenen Preise größer als 1,50 € ist ?

Lösung

Nennen wir die drei Kategorien von Losen A, B und C.

Der Wahrscheinlichkeitsbaum hat folgendes Aussehen:



zu a)

Die Ergebnismenge S kann bei Beachtung der Reihenfolge angeben werden als:

$\{(AA),(AB),(AC),(BA),(BB),(BC),(CA),(CB),(CC)\}$

Spielt die Reihenfolge keine Rolle, so reduziert sich S auf:

$\{(AA),(AB),(AC),(BB),(BC),(CC)\}$

zu b)
Zur Angabe des Erwartungswertes benötigen wir
* die Wahrscheinlichkeiten,
* die Zufallsgrößen, hier die Werte der gewonnenen Preise.
In einer Tabelle zusammengefasst:

	Wahrscheinlichkeit	Zufallsgröße
A	0,5	0,5 €
B	0,3	1 €
C	0,2	2 €

Der Erwartungswert μ ist: $\mu = 0{,}5\cdot 0{,}5 + 0{,}3\cdot 1 + 0{,}2\cdot 2 = 0{,}95\,€$. Da der Einsatz 1 € beträgt, ist von dem Spiel abzuraten.

zu c)
Bei zweimaligem Ziehen ergibt sich die folgende Tabelle:

	Wahrscheinlichkeit	Zufallsgröße
AA	$\frac{2}{9}$	0,5 +0,5 = 1 €
AB	$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$	0,5 + 1 = 1,5 €
AC	$\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2}{9}$	0,5 + 2 = 2,5 €
BC	$\frac{1}{15}+\frac{1}{15}=\frac{2}{15}$	1 + 2 = 3 €
BB	$\frac{1}{15}$	1 + 1 = 2 €
CC	$\frac{1}{45}$	2 + 2 = 4 €

Die Erwartungswert ist

$$\mu = \frac{2}{9}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 1{,}5 + \frac{2}{9}\cdot 2{,}5 + \frac{2}{15}\cdot 3 + \frac{1}{15}\cdot 2 + \frac{1}{45}\cdot 4 = \frac{2}{9} + \frac{1}{2} + \frac{5}{9} + \frac{2}{5} + \frac{2}{15} + \frac{4}{45} = 1{,}90\,€$$

Da der Einsatz nur 1,50 € beträgt, sind die Gewinnaussichten positiv.

Zu d)
Mehr als 1,50 € gewinnt man in den Fällen $\{(AC),(BC),(BB),(CC)\}$.

Die Summe der Wahrscheinlichkeiten dieser Fälle ist: $1-\frac{2}{9}-\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$.

Der Erwartungswert bei zweimaligem Ziehen ist 1,90

❸ Chancen im Studium (Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung)

Nimm an, die Studenten des Studienganges Verbundwerkstoffe lösen ihre Klausuraufgaben zu 70 % vollständig richtig (Teillösungen können vernachlässigt werden). Bei insgesamt 5 Klausuraufgaben in der Matheklausur im 1. Semester reicht eine richtige Aufgabe nur für eine 5,0; zwei richtige Aufgaben reichen zum Bestehen der Klausur (4,0); drei richtige Aufgaben ergeben eine 3,0; vier richtige Aufgaben eine 2,0 und wenn alle 5 Aufgaben richtig gelöst werden, bekommt der Student eine 1,0.

a) Bestimme den Erwartungswert μ für die Anzahl der richtig gerechneten Aufgaben und gib die erwartete Durchschnittsnote an.

b) Berechne die Varianz V(x) und die Standardabweichung σ für die Anzahl der gelösten Aufgaben.

c) Stelle für das 1. Semester des Verbundwerkstoffe-Studienganges (20 Studenten) den wahrscheinlichen Notenspiegel auf. Es gibt ausnahmsweise nur die Noten 5,0 ; 4,0 ; 3,0 ; 2,0 und 1,0.

Lösung

Die Wahrscheinlichkeit, die Klausuraufgaben richtig zu lösen, ist $p = 0{,}7$. Die Zufallsgrößen sind die Anzahl der gelösten Aufgaben oder die Note, beides ist möglich, weil es zwischen beidem eine eineindeutige Zuordnung gibt.
Es handelt sich um eine Bernoulli-Verteilung mit folgender Wahrscheinlichkeitsverteilung:

Wahrscheinlichkeit	Anzahl richtiger Aufgaben	Note
$\binom{5}{0}\cdot 0{,}7^0\cdot 0{,}3^5 = 0{,}00243$	0	6
$\binom{5}{1}\cdot 0{,}7^1\cdot 0{,}3^4 = 0{,}02835$	1	5
$\binom{5}{2}\cdot 0{,}7^2\cdot 0{,}3^3 = 0{,}1323$	2	4
$\binom{5}{3}\cdot 0{,}7^3\cdot 0{,}3^2 = 0{,}3087$	3	3
$\binom{5}{4}\cdot 0{,}7^4\cdot 0{,}3^1 = 0{,}36015$	4	2
$\binom{5}{5}\cdot 0{,}7^5\cdot 0{,}3^0 = 0{,}16807$	5	1

zu a)

Wegen $\sum_{k=0}^{n} k\cdot\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k} = n\cdot p$ ist der Erwartungswert für die Anzahl der richtigen Aufgaben :

$$\mu = \sum_{k=0}^{5} k\cdot\binom{5}{k}\cdot 0{,}7^k\cdot 0{,}3^{5-k} = 5\cdot 0{,}7 = 3{,}5$$

Der Erwartungswert oder die erwartete Durchschnittsnote ist:

$$\mu_N = \sum_{k=0}^{5} (6-k)\cdot\binom{5}{k}\cdot 0{,}7^k\cdot 0{,}3^{5-k} = 6\cdot\left(\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}\cdot 0{,}7^k\cdot 0{,}3^{5-k} - \sum_{k=0}^{5} k\cdot\binom{5}{k}\cdot 0{,}7^k\cdot 0{,}3^{5-k}\right)$$
$$= 6\cdot(1-5\cdot 0{,}7) = 2{,}5$$

zu b)
Die Varianz V ist $V = 5\cdot 0{,}7\cdot 0{,}3 = 1{,}05$ und die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{V} \approx 1{,}025$

zu c)
Es sei n_k die Anzahl der Note k und N (hier 20) die Gesamtzahl der Studenten, dann ist $\frac{n_k}{N}$ die relative Häufigkeit der Note k. Unter den gegebenen Annahmen nähern sich die relativen Häufigkeiten den Wahrscheinlichkeiten an, also hat man

$$\frac{n_k}{N} \approx p_k = \binom{5}{6-k}\cdot 0{,}7^{6-k}\cdot 0{,}3^{k-1} \Rightarrow n_k = N\cdot\binom{5}{6-k}\cdot 0{,}7^{6-k}\cdot 0{,}3^{k-1}$$

Der erwartete Notenspiegel mit N=20 ist also:

Note	Anzahl
1	3
2	7
3	6
4	3
5	1
6	0

Die Anzahl der Note 2 im Notenspiegel ist 7

❹ In einem Wahlbezirk rechnet man auf Grund einer vorausgegangenen Befragung mit 6% Wählern einer bestimmten Partei.
Ein Zeitungsreporter will sich über die Beweggründe der Wähler dieser Partei informieren und befragt Wähler beim Verlassen des Wahllokals.
Wie viele Leute muss er mindestens ansprechen, um mit mindestens 95 %-iger Wahrscheinlichkeit mindestens einen Wähler dieser Partei anzutreffen.
Wir gehen davon aus, dass alle Leute nach ihrer Wahl befragt die Wahrheit sagen.

Lösung
Es handelt sich um ein Bernoulli-Experiment mit $p = 0{,}06$. Bei n Befragten ist die Wahrscheinlichkeit mindestens einen Wähler besagter Partei anzutreffen:

$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}0{,}06^k\cdot 0.94^{n-k}$. Das ist aber wegen $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}0{,}06^k\cdot 0.94^{n-k} = 1$ gleich

$1-\binom{n}{0}\cdot 0{,}06^0\cdot 0{,}94^n$. Also suchen wir nach einem n mit $1-\binom{n}{0}\cdot 0{,}06^0\cdot 0{,}94^n \geq 0{,}95$.

Die Umformung dieser Ungleichung ergibt:

$$1-\binom{n}{0}\cdot 0{,}06^0\cdot 0{,}94^n \geq 0{,}95 \Leftrightarrow$$
$$1-0{,}94^n \geq 0{,}95 \Leftrightarrow$$
$$0{,}05 \geq 0{,}94^n \Leftrightarrow$$
$$\ln(0{,}05) \geq n\cdot\ln(0{,}94) \Leftrightarrow$$
$$\frac{\ln(0{,}05)}{\ln(0{,}94)} \leq n$$

Das Ungleichheitszeichen hat sich im letzten Umformungsschritt umgekehrt, weil $\ln(x)<0$ für $x<1$ ist.

Der Taschenrechner liefert $\frac{\ln(0{,}05)}{\ln(0{,}94)} \approx 48{,}42$.

Die Anzahl der mindestens zu befragenden Personen ist 49

❺ Ein Airbus A320 hat 156 Sitzplätze. Aus Erfahrung weiß die Fluggesellschaft, dass nicht alle gebuchten Reisenden mitfliegen werden. Im Mittel könnte sie zur Vollauslastung 175 Tickets verkaufen.

a) Von welcher Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine gebuchter Passagier auch tatsächlich mitfliegt, geht die Fluggesellschaft aus ?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Passagier wegen Überbuchung abgewiesen werden muss, wenn man 170 Tickets verkauft (Taschenrechner erlaubt).

<u>*Lösung*</u>

zu a)

Wenn man bei 156 Sitzplätzen 175 Flugtickets zur Vollauslastung verkaufen könnte, bedeutet das, der Erwartungswert μ für die Anzahl der Mitflieger bei 175 Tickets ist 156. Wegen $\mu = n\cdot p$ folgt also $156 = 175\cdot p \Leftrightarrow p = \frac{156}{175} \approx 0{,}8914$. p ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein gebuchter Passagier tatsächlich mitfliegt.

.

zu b)

Die Wahrscheinlichkeit, dass es mehr als 156 flugbereite Ticketkäufer gibt, ist $P_{170,p}(X>156)$ oder $1-P_{170,p}(X\leq 156)$. In diesem Fall müssten die Überzähligen abgewiesen werden.

Es ist $P_{170,p}(X>156) = \sum_{k=157}^{170}\binom{170}{k}\cdot\left(\frac{156}{175}\right)^k\left(\frac{19}{175}\right)^{175-k}$.

Der Taschenrechner liefert $P_{170,p}(X>156) \approx 11\%$

Die in b) gesuchte Wahrscheinlichkeit als ganzzahlig gerundete Prozentzahl ist 11

❻ Jemand spielt Lotto und tippt 6 Zahlen aus 49.
Das Ereignis E_i mit $0 \le i \le 6$ sei das, i Richtige zu haben,
a) Bestimme die Wahrscheinlichkeiten $p(E_i)$,
b) Bestimme die Summe $p(E_0)+p(E_1)+...+p(E_6)$
(Hinweis: Vandermondesche Identität: $\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i} \cdot \binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}$)
c) Bestimme den Erwartungswert für die Anzahl der Richtigen dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung (Taschenrechner erlaubt).

<u>Lösung</u>
Wie in Aufgabe 1 a) dargelegt, ist die Anzahl der Kombinationen bei 6 aus 49:
$\binom{49}{6} = 13983816$

Zu a)
Betrachte E_i mit $0 \le i \le 6$
Die Anzahl der günstigen Ergebnisse entspricht der Anzahl der Möglichkeiten aus 6 i Richtige herauszugreifen, das sind $\binom{6}{i}$, multipliziert mit der Anzahl der Möglichkeiten, die übrigen (6 – i) falschen Zahlen aus den 43 verbleibenden, d.s. $\binom{43}{6-i}$, zu wählen, also

$$p(E_i) = \frac{\binom{6}{i} \cdot \binom{43}{6-i}}{\binom{49}{6}}$$

Wegen $\binom{6}{0} = 1$ gilt das auch für $i = 0$.

Zu b)
In Summenschreibweise geht es um die Ermittlung von

$$\sum_{i=0}^{6} p(E_i) = \sum_{i=0}^{6} \frac{\binom{6}{i} \cdot \binom{43}{6-i}}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{\binom{49}{6}} \cdot \sum_{i=0}^{6} \binom{6}{i} \cdot \binom{43}{6-i} \quad .$$

Mit der Vandermondeschen Identität können wir die Summe schreiben als:
$\sum_{i=0}^{6} \binom{6}{i} \cdot \binom{43}{6-i} = \binom{49}{6}$ und damit ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten 1, was nicht verwundert, weil wir einen vollständigen Ereignisraum betrachtet haben.

Zu c)
Der Erwartungswert μ ist:

$$\mu = \sum_{i=0}^{6} p(E_i) \cdot i \approx 1 \cdot 0{,}41302 + 2 \cdot 0{,}13238 + 3 \cdot 0{,}01765 + 4 \cdot 0{,}00097 + 5 \cdot 0{,}00002 + 6 \cdot 0{,}00000$$
$$\approx 0{,}73471$$

Die Wahrscheinlichkeit für 3 Richtige ganzzahlig gerundet ist 2 %

Lösungen mit Kennsilben											
30 LE	11 HE	8 NS	1,9 RT	51 MI	27 GA	2 RE	49 SC	2,1 BE	10 TT	7 EN	3 EL
Lösungswort: GARTENSCHERE											

❼ Expertenaufgabe (geometrische Wahrscheinlichkeitsverteilung)

Die Wahrscheinlichkeit mit einer Münze Kopf oder Zahl zu werfen ist $p=0{,}5$.
Wir betrachten als Ereignis E_i , dass Kopf <u>erstmalig</u> im i-ten Wurf erscheint . Die Zufallsgröße ist also die Zahl i.

a) Bestimme die Wahrscheinlichkeit $p(E_i)$.

b) Beschreibe den gesamte Ereignisraum und die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung.

c) Weise nach, dass die Summe aller Wahrscheinlichkeiten 1 ist.

<u>Lösung</u>

zu a)

Sei p die Wahrscheinlichkeit für den Erfolg und $q=1-p$ die Wahrscheinlichkeit für den Misserfolg. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, im i-ten Versuch erstmalig Erfolg zu haben: $p(E_i)=p\cdot q^{i-1}$. In diesem Fall ist $p=q=\frac{1}{2}$, also $p(E_i)=(\frac{1}{2})^i$

zu b)

Die Zufallsgröße ist die Positions-Nr des ersten Erfolges. Der Ereignisraum ist unendlich, denn jedem i kann eine nicht-verschwindende Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden, hier $i\rightarrow(\frac{1}{2})^i$.

zu c)

Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten ist $\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}(\frac{1}{2})^i$.

Bei der Summe handelt es sich um die „geometrische Summe“.

Hierfür gilt: $\sum_{i=1}^{k}(\frac{1}{2})^i=\sum_{i=0}^{k-1}(\frac{1}{2})^{i+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-(\frac{1}{2})^k}{1-\frac{1}{2}}=1-(\frac{1}{2})^k$ und im Grenzwert für $k\to\infty$ geht dieser Ausdruck gegen 1.