Fit in Mathe

Musterlösungen 1

Juni Klassenstufe 9

Thema	Lineare Funktionen

❶

a) Vervollständige die Tabelle mit den Funktionswerten:

x	2	4	6	8	10	12	14	16	20
$\frac{1}{2}x+4$	5	6	7	8	9	10	11	12	14

b) Gib die Funktionsgleichung an

x	2	4	6	8	10	12	14	16	20
$-\frac{3}{8}x+3{,}5$	2,75	2	1,25	0,5	-0,25	-1	-1,75	-2,5	-4

c) Gib die jeweiligen Werte für x an

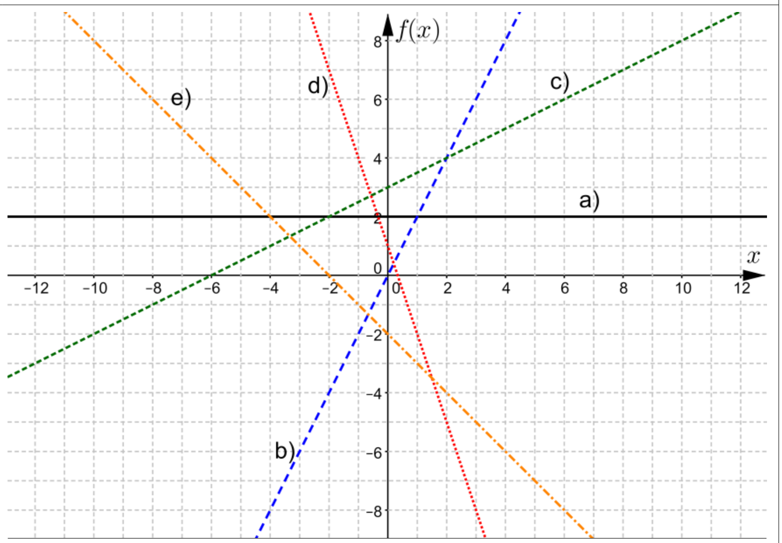
x	3	7,5	9	11	16,75	23,2	27,3	90	100
$\frac{1}{2}x-5$	-3,5	-1,25	-0,5	0,5	3,375	6,6	8,65	40	45

Die Summe aller gefundenen Zahlen (auch in der Funktionsgleichung) ganzzahlig gerundet ist 373 .

❷

Gib die Funktionsgleichungen für die abgebildeten Graphen an.

a) $f(x)=$
b) $f(x)=$
c) $f(x)=$
d) $f(x)=$
e) $f(x)=$



<u>Lösung</u>

zu a) $f(x)=2$ zu b) $f(x)=2x$ zu c) $f(x)=\frac{1}{2}x+3$ zu d) $f(x)=-3x+1$

zu e) $f(x)=-x-2$

Die Summe aller Steigungen und additiven Konstanten ist 2,5

❸ Auf dem Graphen der linearen Funktion $f(x) = mx+b$ mit der Steigung m liegt der Punkt P. Bestimme den Funktionsterm.

a) $m = 2 \;;\; P(3|4)$ b) $m = 0{,}3 \;;\; P(0|-2)$ c) $m = -\frac{7}{9} \;;\; P(9|-2)$

<u>Lösung</u>

Es empfiehlt sich, die Punkt-Steigungs-Formel anzuwenden, nämlich

$f(x) = m(x-x_0)+y_0$

Damit ergeben sich die Funktionsgleichungen

a) $f(x) = 2\cdot(x-3)+4 = 2x-2$ b) $f(x) = 0{,}3\cdot x-2$

c) $f(x) = -\frac{7}{9}\cdot(x-9)-2 = -\frac{7}{9}x+5$

Die Summe aller Funktionswerte f(90) ist 138.

❹ Auf dem Graphen der linearen Funktion $f(x) = mx+b$ liegen die Punkte P und Q. Bestimme den Funktionsterm

a) $P(2|1) \;;\; Q(6|9)$ b) $P(-4|-2) \;;\; Q(-3|-4)$

<u>Lösung</u>

Es empfiehlt sich die Zwei-Punkte-Formel anzuwenden, d.h.

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \Leftrightarrow y = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1)+y_1$$

zu a) $y = \frac{8}{4}\cdot(x-2)+1 = 2x-3$ zu b) $y = -\frac{2}{1}\cdot(x+4)-2 = -2x-10$

Die Summe der Beträge aller Steigungen und additiven Konstanten ist 17.

❺ Bestimme die Nullstellen der folgenden Funktionen

a) $f(x) = \frac{1}{2}x-12$ b) $f(x) = -\frac{2}{3}x+3$

<u>Lösung</u>

Löse die Gleichungssysteme

zu a) $0 = \frac{1}{2}x-12 \Leftrightarrow$

$12 = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow$

$24 = x$

zu b) $0 = -\frac{2}{3}x+3 \Leftrightarrow$

$\frac{2}{3}x = 3 \Leftrightarrow$

$x = 4{,}5$

Die Summe der Nullstellen ist 28,5

❻ Gegeben sind die Funktionen $f(x) = 0{,}5x+6$ und $g(x) = -1{,}5x+4$.

a) Bestimme den Schnittpunkt *S* der Graphen der Funktionen.

b) Bestimme die Schnittpunkte der Graphen mit den Achsen.

Lösung
zu a)
Im Schnittpunkt sind die beiden y-Koordinaten gleich, also muss erfüllt sein:
$0{,}5x+6 = -1{,}5x+4 \Leftrightarrow x = -1$
Eingesetzt in eine der beiden Funktionsgleichungen – hier die erste- ergibt:
$y = 0{,}5\cdot(-1)+6 = 5{,}5$
Also ist der Schnittpunkt $P(-1|5{,}5)$.
Zu b)
Der Schnittpunkt des ersten Graphen mit der y-Achse ist: $P_y(0|6)$
Der Schnittpunkt mit der x-Achse ist die Nullstelle, d.h. er genügt der Gleichung:
$0{,}5x+6 = 0 \Leftrightarrow x = -12$, also hat der Punkt die Koordinaten $P_x(-12|0)$.
Der Schnittpunkt des zweiten Graphen mit der y-Achse ist: $P_y(0|4)$
Der Schnittpunkt mit der x-Achse ist die Nullstelle, d.h. er genügt der Gleichung:
$-1{,}5x+4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}$, also hat der Punkt die Koordinaten $P_x(\frac{8}{3}|0)$.

Die Summe der y-Koordinaten aller 5 zu berechnenden Punkte ist 15,5

❼ Der Mobilfunkanbieter MOBILSTAR bietet folgende Tarife an:
CALL-FLAT: Grundgebühr je Monat 9,90 EUR (unbegrenztes Telefonieren).
PREPAID-CALL: Grundgebühr je Monat 4,50 EUR und 9 Cent pro Minute.

a) Gib die Funktionsgleichung für den CALL-FLAT-Tarif und

b) für den PREPAID-CALL-Tarif an.

c) Gib an, für welche Anzahl von Minuten je Monat man bei beiden Tarifen das gleiche zahlt.

d) Welchen Tarif würdest Du empfehlen (und warum)?

Lösung
Wir stellen für beide Anbieter eine Funktion auf, die der vertelefonierten Zeit t die Kosten $K_1(t)$ für den Anbieter CALL-FLAT und $K_2(t)$ für den Anbieter PREPAID-CALL zuordnet (jeweils in €).
zu a)
Die Kosten von CALL-FLAT sind $K_1(t) = 9{,}90$, da es keine Abhängigkeit von der Zeit gibt.
Zu b)
Die Kosten von PREPAID-CALL sind $K_2(t) = 0{,}09\cdot t+4{,}5$
zu c)
Gleichheit der Kosten liegt vor, wenn $9{,}9 = 0{,}09t+4{,}5 \Leftrightarrow 5{,}4 = 0{,}09\cdot t \Leftrightarrow t = 60$, d.h. bei 60 Minuten monatlichem Telefonieren zahlt man bei beiden Tarifen dasselbe.
Zu d)
Für jemanden, der weniger als 60 Minuten im Monat telefoniert, ist der PREPAID-CALL-Tarif zu empfehlen, sollte er im Monat mehr telefonieren, sollte er den anderen Tarif wählen.

Gleich teuer sind die Tarife, wenn man monatlich 60 Minuten telefoniert.

Lösungen mit Kennsilben													
OS	IM	RI	EN	RU	KL	ES	TF	NG	AA	NE	DE	RZ	EN
375	2,5	140	27,5	15,5	373	19	3,5	60	138	16,5	28,5	45	17
Lösungswort:KLIMAAENDERUNG													

❼ <u>Expertenaufgabe</u>

Hat man drei (oder mehrere) Punkte vorgegeben, die nicht auf einer Geraden liegen, kann man die Ausgleichsgerade $f(x) = mx+b$ ziehen und berechnen, die optimal an die Punkte angepasst ist.

Beispiel: Gegeben sind die Punkte $P_1(1|1), P_2(2|4), P_3(3|4)$.

Als erstes berechnet man den Schwerpunkt $P_S(x_S|y_S)$, indem man den Mittelwert der Koordinaten bildet, d.h. alle Koordinaten addiert und durch die Anzahl dividiert, hier. $x_S = \frac{1+2+3}{3} = 2$ und $y_S = \frac{1+4+4}{3} = 3$ also $P_S(2|3)$.

Eine Gerade durch den Schwerpunkt ist $f(x) = m(x-x_S)+y_S$ und bezogen auf die x-Koordinaten der drei Punkte gilt: $f(1) = m\cdot(-1)+3$, $f(2) = 3$, $f(3) = m+3$.

Nun suchen wir das m, für welches die Summe der Abstandsquadrate

$$(f(1)-1)^2+(f(2)-4)^2+(f(3)-4)^2 = (-m+2)^2+(-1)^2+(m-1)^2 =: F(m)$$

kleinstmöglich wird. Nach einigen Umrechnungen erhält man:

$F(m) = 2m^2-6m+6$ bzw. in Scheitelpunktdarstellung $F(m) = 2\cdot(m-1{,}5)^2+1{,}5$.

Für $m = 1{,}5$ ist also die Summe der Abstandsquadrate am kleinsten. Die in diesem Sinne optimale Gerade ist also $f(x) = 1{,}5(x-2)+3 = 1{,}5x$

Berechne die Funktionsterme der Ausgleichsgeraden zu

a) $P_1(2|1), P_2(4|6), P_3(6|8)$ b) $P_1(-1|-3), P_2(4|5), P_3(9|12), P_4(14|9)$

<u>Lösung</u>

zu a)

Die Schwerpunktskoordinaten sind $x_S = \frac{2+4+6}{3} = 4$ bzw. $y_S = \frac{1+6+8}{3} = 5$

Damit kann man für die Ausgleichsgerade ansetzen $f(x) = m(x-4)+5$ und es ist $f(2) = m(-2)+5$, $f(4) = 5$ und $f(6) = 2m+5$.

Die Summe der Abstandsquadrate ist dann:

$$F(m) = (m(-2)+4)^2+(-1)^2+(2m-3)^2 = 4m^2-16m+16+1+4m^2-12m+9$$
$$= 8m^2-28m+26$$

oder in Scheitelpunktdarstellung $F(m) = 8(m-\frac{7}{4})^2+\frac{3}{2}$.

Also muss $m = 1{,}75$ sein.

Damit ergibt sich als Ausgleichsgerade: $f(x) = 1{,}75\cdot(x-4)+5 = 1{,}75x-2$

zu b)

Die Schwerpunktskoordinaten sind $x_S = \frac{-1+4+9+14}{4} = \frac{26}{4} = 6{,}5$ bzw.

$$y_S = \frac{-3+5+12+9}{4} = \frac{23}{4} = 5{,}75$$

Damit kann man für die Ausgleichsgerade ansetzen $f(x)=m(x-\frac{26}{4})+\frac{23}{4}$ und es ist $f(-1)=m(-\frac{15}{2})+\frac{23}{4}$, $f(4)=m(-\frac{5}{2})+\frac{23}{4}$,. $f(9)=m\frac{10}{4}+\frac{23}{4}$ und $f(14)=m\frac{30}{4}+\frac{23}{4}$

Die Summe der Abstandsquadrate ist dann:

$$F(m)=(-m\frac{15}{2}+\frac{35}{4})^2+(-m\frac{5}{2}+\frac{3}{4})^2+(m\frac{5}{2}-\frac{25}{4})^2+(m\frac{15}{2}-\frac{13}{4})^2=$$

$$\frac{225}{4}m^2-\frac{525}{4}m+\frac{1225}{16}+\frac{25}{4}m^2-\frac{15}{4}m+\frac{9}{16}+\frac{25}{4}m^2-\frac{125}{4}m+\frac{625}{16}+\frac{225}{4}m^2-\frac{195}{4}m+\frac{169}{16}$$

$$=\frac{500}{4}m^2-\frac{860}{4}m+\frac{2028}{16}$$

$$=125m^2-215m+\frac{507}{4}$$

$$=125(m^2-\frac{43}{25}m+(\frac{43}{50})^2-(\frac{43}{50})^2)+\frac{507}{4}$$

$$=125(m-\frac{43}{50})^2-125\cdot(\frac{43}{50})^2+\frac{507}{4}$$

Die optimale Steigung der Ausgleichgeraden ist also $m=\frac{43}{50}=0{,}86$ und eingesetzt in den Ansatz der Funktionsgleichung ergibt sich

$$f(x)=\frac{43}{50}(x-\frac{26}{4})+\frac{23}{4}=0{,}86x+0{,}16$$