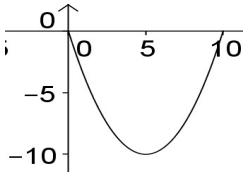




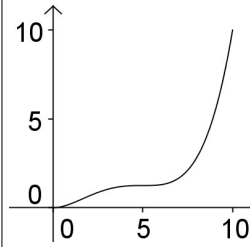
Thema

## Funktionsuntersuchungen

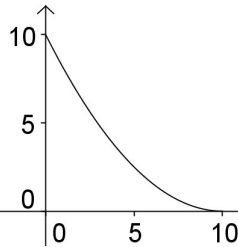
1 a)



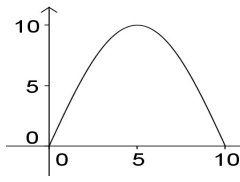
b)



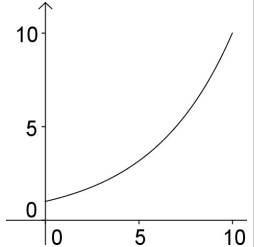
c)



d)



e)



Das Steigungsverhalten von Funktionsgraphen kann mit den Begriffen

(1) *(streng) monoton steigend / fallend.*

(2) *rechtsgekrümmt* oder *konkav* bzw. *linksgekrümmt* oder *konvex* beschrieben werden.

Auch Kombinationen sind möglich wie

(3) *degressiv/progressiv fallend/steigend* für „monoton fallend/steigend“ und „konkav/konvex“.

Ordne den obigen Graphen den richtigen Begriff aus (1) bis (3) zu, der eindeutig nur ihm im Intervall  $[0; 10]$  zukommt.

### Lösung

zu a) linksgekrümmt oder konvex, also Lösungsziffer 2,

zu b) streng monoton steigend, kein einheitliches Krümmungsverhalten, also Lösungsziffer 1,

zu c) degressiv fallend, also Lösungsziffer 3,

zu d) rechtsgekrümmt oder konkav, also Lösungsziffer 2,

zu e) progressiv steigend, also Lösungsziffer 3

Die Ziffern in der richtigen Reihenfolge ergeben die Lösungszahl 21323, also Buchstabenpaar KI

2

Die folgenden Ableitungen beschreiben in entsprechender Reihenfolge das Steigungsverhalten der Funktionen aus Aufgabe 1.

$$(1) f'(x) = \pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{10} \cdot x\right) \quad (2) f'(x) = 0,2x - 2 \quad (3) f'(x) = \frac{\ln(10)}{10} \cdot 10^{\frac{x}{10}}$$

$$(4) f'(x) = 0,8x - 4 \quad (5) f'(x) = 0,024x^3 - 0,24x^2 + 0,6x$$

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.



## Lösung

zu a) gehört die Funktion (4), (hat Nullstelle beim Minimum an Stelle  $x=5$ ).

zu b) gehört die Funktion (5), (hat Nullstellen an den Sattelpunkten bei  $x=0$  und  $x=5$ )

zu c) gehört die Funktion (2), (ist auf dem Intervall negativ und hat Nullstelle bei Minimum an Stelle  $x=10$ )

zu d) gehört die Funktion (1), (hat bis  $x=5$  positive Steigungen, dann negative)

zu e) gehört die Funktion (3), (ist über dem Intervall progressiv steigend, wie der Funktionsgraph)

*Die Ziffern in der richtigen Reihenfolge ergeben die Lösungszahl 45213, also Buchstabenpaar RS.*

**3** Gegeben sind die Funktionen:

a)  $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$     b)  $f(x) = x^5 - 3x^3 + 2x - 1$     c)  $f(x) = |x^3 - x|$

d)  $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$     e)  $f(x) = x \cdot \sin(x)$     f)  $f(x) = 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$

Gib an, welche Funktionen auf ihrem jeweiligen Definitionsbereich

- \* achsensymmetrisch (=1),
- \* punktsymmetrisch (=2) oder
- \* keines von beidem (=0) sind.

## Lösung

zu a)

Für alle  $x \in \mathbb{R}$  ist  $f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 + 2 = x^4 - 3x^2 + 2 = f(x)$ , also liegt Achsensymmetrie vor, d.h. Lösungsziffer 1.

zu b)

Für alle  $x \in \mathbb{R}$  ist

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^5 - 3(-x)^3 + 2 \cdot (-x) - 1 = -x^5 + 3x^3 - 2x - 1, \\ &= -(x^5 - 3x^3 + 2x) - 1 = -(f(x) - 1) - 1 = -f(x) - 2 \end{aligned}$$

also liegt weder Achsensymmetrie noch Punktsymmetrie vor, d.h. Lösungsziffer 0.

zu c)

Für alle  $x \in \mathbb{R}$  ist

$$f(-x) = |(-x)^3 - (-x)| = |-x^3 + x| = |(-1)(x^3 - x)| = |(x^3 - x)| = f(x), \text{ also liegt}$$

Achsensymmetrie vor, d.h. Lösungsziffer 1.

zu d)

Für alle  $x \in \mathbb{R}$  ist

$$f(-x) = (-x) \cdot e^{(-x)^2} = -x \cdot e^{x^2} = -f(x), \text{ also liegt Punktsymmetrie vor, d.h.}$$

Lösungsziffer 2.

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.



zu e)

Für alle  $x \in \mathbb{R}$  ist

$f(-x) = (-x) \cdot \sin(-x) = (-x) \cdot (-\sin(x)) = x \cdot \sin(x) = f(x)$ , also liegt Achsensymmetrie vor, d.h. Lösungsziffer 1.

zu f)

Die Funktion ist nur definiert für  $1 - \frac{x^2}{9} \geq 0 \Leftrightarrow 9 \geq x^2 \Leftrightarrow 3 \geq |x|$  oder  $x \in [-3; 3]$  und für  $x \in [-3; 3]$  ist

$$f(-x) = 2\sqrt{1 - \frac{(-x)^2}{9}} = 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}} = f(x), \text{ also liegt Achsensymmetrie vor, d.h.}$$

Lösungsziffer 1.

*Die Lösungsziffern in der richtigen Reihenfolge ergeben die Lösungszahl 101211, also Buchstabenpaar CH.*

**4** Bestimme die Nullstellen folgender Funktionen (falls existent)

a)  $f(x) = x^2 - x - 6$     b)  $f(x) = (x^4 - 5x^2 + 6) \cdot (x^2 + 1)$     c)  $f(x) = 10^{2x} - 10^x - 10,1 + 1$

d)  $f(x) = \sin^2(\pi x) - 1,5 \sin(\pi x) + 0,5$  für  $x \in [-1; 1]$

e)  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$     f)  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$     g)  $f(x) = \sin^2(x) - 4$

Lösung

zu a)

$$0 = x^2 - x - 6 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6} \text{ oder } x = \frac{1}{2} - \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{25}{4}} \text{ oder } x = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{25}{4}}$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ oder } x = -2$$

d.h. die Nullstellen sind  $x_1 = 3$  und  $x_2 = -2$ .

zu b)

Ein Produkt ist genau dann gleich 0, wenn ein Faktor 0 ist. Der 2. Faktor wird aber niemals 0, also reicht die Untersuchung des 1. Faktors, d.h.  $0 = x^4 - 5x^2 + 6$ .

Zur Lösungssuche ersetzen wir diese Gleichung durch das Gleichungssystem

$$z = x^2 \text{ und } 0 = z^2 - 5z + 6.$$

$$0 = z^2 - 5z + 6 \Leftrightarrow z = \frac{5}{2} + \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6} \text{ oder } z = \frac{5}{2} - \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{24}{4}} \text{ oder } z = \frac{5}{2} - \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{24}{4}}$$

$$\Leftrightarrow z = 3 \text{ oder } z = 2$$

Wegen  $z = x^2$  suchen wir nun weiterhin nach x mit der Eigenschaft:

$$x^2 = 2 \text{ oder } x^2 = 3$$

und erhalten schließlich als Lösungsmenge:  $x_1 = \sqrt{2}, x_2 = -\sqrt{2}, x_3 = \sqrt{3}, x_4 = -\sqrt{3}$ .

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.



zu c)

Setze  $z := 10^x$ . Damit wird aus  $0 = 10^{2x} - 10^x 10,1 + 1$  das Gleichungssystem:

$$z = 10^x \quad \text{und} \quad z^2 - 10,1z + 1 = 0.$$

Wir lösen zunächst die quadratische Gleichung in  $z$  und erhalten die Lösungen

$$z_1 = \frac{101}{20} + \sqrt{\left(\frac{101}{20}\right)^2 - \frac{400}{400}} \quad \text{oder} \quad z_2 = \frac{101}{20} - \sqrt{\left(\frac{101}{20}\right)^2 - \frac{400}{400}} \quad \text{bzw.}$$

$$z_1 = \frac{101}{20} + \frac{99}{20} = 10 \quad \text{oder} \quad z_2 = \frac{101}{20} - \frac{99}{20} = \frac{1}{10}.$$

Damit gehen wir in die erste Gleichung und erhalten aus

$$10^x = 10 \Rightarrow x = 1 \quad \text{bzw.} \quad 10^x = \frac{1}{10} = 10^{-1} \Rightarrow x = -1.$$

Die Lösungsmenge besteht also aus den Lösungen  $x_1 = 1$  und  $x_2 = 10^{-1}$ .

zu d)

Setze  $z := \sin(\pi x)$ . Damit wird aus  $0 = \sin^2(\pi x) - 1,5 \sin(\pi x) + 0,5$  das Gleichungssystem:

$$z = \sin(\pi x) \quad \text{und} \quad z^2 - 1,5z + 0,5 = 0.$$

Wir lösen zunächst die quadratische Gleichung in  $z$  und erhalten die Lösungen

$$z_1 = \frac{3}{4} + \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}} \quad \text{oder} \quad z_2 = \frac{3}{4} - \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}} \quad \text{bzw.}$$

$$z_1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1 \quad \text{oder} \quad z_2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Damit gehen wir in die erste Gleichung und erhalten aus

$$1 = \sin(\pi x) \Rightarrow x = \frac{1}{2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{2} = \sin(\pi x) \Rightarrow x = \frac{1}{6} \quad \text{oder} \quad x = \frac{5}{6}.$$

Die Lösungsmenge besteht also aus den Lösungen  $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{6}, x_3 = \frac{5}{6}$ .

zu e)

Es ist die Gleichung  $0 = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$  zu lösen.

Wenn die Lösungen ganzzahlig sind, sind sie Teiler des additiven Gliedes.

Deswegen testen wir erst diese und finden durch Probieren  $x_1 = 1$ , dann ist aber der Linearfaktor  $x - 1$  ein Teiler des Polynoms, d.h.

$$(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x - 1) = x^2 - 5x + 6$$

$$x^3 - x^2$$

-----

$$-5x^2 + 11x$$

$$-5x^2 + 5x$$

-----

$$6x - 6$$

$$6x - 6$$

Die Nullstellen dieses Polynoms (wie schon in Aufgabenteil b durchgeführt) sind:

$$x_2 = 2 \quad \text{und} \quad x_3 = 3$$

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.



zu f)

Es ist die Gleichung  $0 = \frac{x^2-4}{x^2+4}$  zu lösen.

Ein Bruch ist genau dann 0, wenn der Zähler 0 ist. Die Nullstellen des Zählers sind aber  $x_1 = 2$  und  $x_2 = -2$ .

zu g)

Es ist die Gleichung  $0 = \sin^2(x) - 4$  zu lösen. Es gilt aber immer  $|\sin(x)| \leq 1$ , also auch  $\sin^2(x) \leq 1$  für  $x \in \mathbb{R}$ . Es gibt also keine Lösung.

*Die Summe aller Nullstellen ist*

$$3 - 2 + \sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3} + 10 + 0,1 + 1 + \frac{1}{6} + \frac{5}{6} + 1 + 2 + 3 + 2 - 2 = 19,1, \text{ also}$$

*Buchstabenpaar BL.*

5 Gegeben ist die Funktion  $f(x) = x^3 - 6x^2 + ax - 3$ .

Bestimme a so, dass der Graph zu f

a) an der Stelle  $x = 2$  eine Nullstelle hat.

b) genau eine Tangente mit der Steigung 0 besitzt.

Lösung

zu a)

Wenn  $x = 2$  eine Nullstelle ist, so muss sich das Polynom mit geeigneten p und q darstellen lassen als

$$x^3 - 6x^2 + ax - 3 = (x^2 + px + q) \cdot (x - 2) = x^3 + (p-2) \cdot x^2 + (q-2p) \cdot x - 2q.$$

Durch Koeffizientenvergleich führt das auf die Gleichungen:

$$(1) \quad p - 2 = -6$$

$$(2) \quad q - 2p = a$$

$$(3) \quad -2q = -3$$

Aus (1) folgt:  $p = -4$  und aus (3):  $q = \frac{3}{2}$  und damit ergibt sich aus (2):

$$a = \frac{3}{2} + 8 = \frac{19}{2} = 9,5$$

zu b)

Die Steigungen des Graphen an einer Stelle x ergeben sich aus:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + a. \text{ Gäbe es eine Steigung 0, so müsste sein:}$$

$$0 = 3x^2 - 12x + a \Leftrightarrow 0 = x^2 - 4x + \frac{a}{3}.$$

Die Lösungen dieser Gleichung mit der pq-Formel sind  $x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{2^2 - \frac{a}{3}}$ .

Genau eine Lösung ist gegeben, wenn  $2^2 - \frac{a}{3} = 0 \Leftrightarrow a = 12$  ist.

*Die Summe beider Lösungen ist  $9,5 + 12 = 21,5$ , also Buchstabenpaar UE*

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.



**6** Ein Kraftwerk erzeugt gleichmäßig 24 Stunden am Tag Strom. Die Stromabnahme ist aber über den Tag ungleichmäßig, sie steigt von ihrem Minimum um 0 Uhr auf ihr Maximum um 12 Uhr und fällt symmetrisch zum Anstieg bis 24 Uhr wieder ab. Um dieses Verhalten auszugleichen, pumpt man mit dem gewonnenen Strom des Kraftwerkes gleichmäßig Wasser in einen höher gelegenen Speichersee und erzeugt bedarfsgerecht Strom durch Ablassen des Wassers über eine tiefer gelegene Turbine. Gib ein Polynom 3. Grades für den Pegelstand des Speichersees  $P(t)$  an, wenn wir annehmen, dass der tägliche Strombedarf einer Differenz von 12 m entspricht. Setze  $P(0) = P(24) = 0$ .

### Lösung

Betrachten wir zunächst die Entnahmeseite und setzen wir hierfür ein Polynom 3. Grades für den Pegelstand an:

$$P_E(t) = at^3 + bt^2 + ct + d \text{ mit } P_E'(t) = 3at^2 + 2bt + c \text{ und } P_E''(t) = 6at + 2b$$

Da im Zeitpunkt  $t=0$  keine Entnahme stattfindet, ist  $P_E'(0) = c = 0$ .

Bei  $t=12$  ist die Entnahme maximal, d.h.

$$(1) P_E''(12) = 72a + 2b = 0$$

Außerdem muss sein:

$$(2) P_E(24) = 13824a + 576b = -12$$

Das führt auf das Gleichungssystem

$$36a + b = 0$$

$$1152a + 48b = -12$$

und mit  $b = -36a$  in die 2. Gleichung eingesetzt ergibt sich

$$1152a - 1728a = -12 \Leftrightarrow a = \frac{1}{576} \text{ und } b = -\frac{1}{16}$$

Die Zulaufseite kann durch folgende Funktion beschrieben werden:

$$P_Z(t) = \frac{12}{24} \cdot t = \frac{1}{2}t$$

Insgesamt ist die Pegelfunktion also  $P(t) = P_E(t) + P_Z(t) = \frac{1}{576}t^3 - \frac{1}{16}t^2 + \frac{1}{2}t$ .

Die Ableitung hiervon ist  $P'(t) = \frac{1}{192}t^2 - \frac{1}{8}t + \frac{1}{2}$  mit den Nullstellen aus der

$$\text{Gleichung } 0 = \frac{1}{192}t^2 - \frac{1}{8}t + \frac{1}{2} \Leftrightarrow t^2 - 24t + 96 = 0 :$$

$$t_{1/2} = 12 \pm \sqrt{12^2 - 96} = 12 \pm 4\sqrt{3} \Rightarrow t_1 \approx 5,07 \text{ und } t_2 \approx 18,93$$

Der höchste Pegel ist  $P(12 - 4\sqrt{3}) \approx 1,155 \text{ m}$  und

der niedrigste ist  $P(12 + 4\sqrt{3}) \approx -1,155 \text{ m}$ ,

*Der Pegelhub ist ca. 2,3 m, also Buchstabenpaar TE.*

### Lösungen mit Kennsilben

101112	21,5	32211	21323	18,5	2,3	5,4	45213	19,1	52134	20,9	101211
RG	UE	OS	KI	LO	TE	EN	RS	BL	TE	CK	CH

Lösungswort: KIRSCHBLUETE

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.



## 7 Expertenaufgabe

Man kann Funktionswerte einer unbekanntem Funktion mit Näherungspolynomen annähern, wenn man „Stützstellen“ kennt.

Das nachstehende Verfahren ist als „Newtonsche Interpolation“ bekannt.

Es seien die Stützpunkte  $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$  gegeben. Definiere ein Polynom

$$p_n(x) = c_0 + c_1 \cdot (x - x_0) + c_2 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) + \dots + c_n \cdot (x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1})$$

und bestimme die  $c_i$  so, dass  $p_n(x_i) = y_i$  für  $i = 0, \dots, n$ . Das führt auf ein Gleichungssystem in Dreiecksgestalt für die unbekanntem  $c_i$  (warum?), das relativ leicht zu lösen ist.

Damit lässt sich nun ein Näherungswert  $p_n(x^*)$  für einen Wert  $x^*$  ausrechnen.

Bestimme z.B. ein Polynom durch die Punkte:  $(1|9), (3|-27), (4|-30), (7|165)$ .

### Lösung

Das entstehende Gleichungssystem ist:

$$y_0 = p_n(x_0) = c_0$$

$$y_1 = p_n(x_1) = c_0 + c_1(x_1 - x_0)$$

$$y_2 = p_n(x_2) = c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

...

$$y_n = p_n(x_n) = c_0 + c_1(x_n - x_0) + c_2(x_n - x_0)(x_n - x_1) + \dots + c_n(x_n - x_0)(x_n - x_1) \cdot \dots \cdot (x_n - x_{n-1})$$

und dieses kann beginnend mit der ersten Zeile gelöst werden, weil von Zeile zu Zeile immer eine Unbekannte hinzukommt.

Beim gegebenen Beispiel ist  $n=3$  (da die Zählung bei 0 beginnt) und es ergibt sich das Gleichungssystem:

$$9 = c_0$$

$$-27 = c_0 + c_1 \cdot 2$$

$$-30 = c_0 + c_1 \cdot 3 + c_2 \cdot 3$$

$$165 = c_0 + c_1 \cdot 6 + c_2 \cdot 24 + c_3 \cdot 72$$

Dieses hat die Lösung:

$$c_0 = 9$$

$$c_1 = \frac{-27 - 9}{2} = -18$$

$$c_2 = \frac{-30 - 9 + 54}{3} = 5$$

$$c_3 = \frac{165 - 9 - 6 \cdot (-18) - 24 \cdot 5}{72} = 2$$

also

$$p_3(x) = 9 - 18(x - 1) + 5(x - 1)(x - 3) + 2(x - 1)(x - 3)(x - 4) = 2x^3 - 11x^2 + 18$$

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.