



1 Bestimme die Lösungsmenge durch Probieren.

a) $36 = x^2$ b) $-125 = x^3$ c) $4^{x+1} = 64$ d) $16^x = 64$ e) $\sin(x) = 1$
f) $\cos(x) = \frac{1}{2}$ g) $\tan(x) = 1$ h) $(x+3) \cdot (4-x) = 0$ i) $\sqrt{1+x} = 2$

Lösung

zu a) $x = 6$ oder $x = -6$ zu b) $x = -5$ zu c) $x = 2$ zu d) $x = \frac{3}{2}$

zu e) $x = \frac{\pi}{2} \pm n \cdot 2\pi$ mit $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

zu f) $x = \frac{\pi}{3} \pm n \cdot 2\pi$ oder $x = \frac{5}{3} \cdot \pi \pm n \cdot 2\pi$ mit $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

zu g) $x = \frac{\pi}{4} \pm n \cdot \pi$ mit $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

zu h) $x = -3$ oder $x = 4$ zu i) $x = -3$

Die Lösungsanzahl im Intervall $[-2\pi; 2\pi]$ ist $2+1+1+1+2+4+4+2+1 = 18$ (BU)

2 Löse das lineare Gleichungssystem.

a) $x - 2y = 2$ b) $3x - 2y = 0$ c) $x - 2y + z = 0$
 $2x + y = 9$ $2x + 4y = 16$ $2x + y + 3z = 6$
 $-2x - y + 10z = 7$

d) $2x - 2y + 2z = 4$
 $2x + 2y + z = 9$
 $-x - 3y + 3z = 2$

Lösung

Mit dem Gauß-Algorithmus ermittelt man

zu a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow y = 1$ und $x = 4$

zu b) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 16 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & \frac{16}{3} & 16 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow y = 3$ und $x = 2$

zu c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ -2 & -1 & 10 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 6 \\ 0 & -5 & 12 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 13 & 13 \end{pmatrix}$
 $\Rightarrow z = 1$ und $y = 1$ und $x = 1$

zu d) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 9 \\ -1 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & -4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}$
 $\Rightarrow z = 3$ und $y = 2$ und $x = 1$

Die Summe aller Lösungen ist $(1+4)+(3+2)+(1+1+1)+(3+2+1)=19$ (ND)

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.



3 Bestimme die Lösungsmenge mithilfe von Term- oder Äquivalenzumformungen.

a) $x^2 + 4x = 0$ b) $(2x)^4 = 81$ c) $32 \cdot 2^{x-1} = 4^{x+1}$ d) $10 \cdot 4^{2x+1} = 640$
e) $-6 + 2x^4 = 156$ f) $3 \cdot 5^{3x-6} = 375$ g) $6 = x^3 - 36x + 6$

Lösung

zu a) $x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x \cdot (x+4) = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $x = -4$

zu b) $(2x)^4 = 81 \Rightarrow 2^4 \cdot x^4 = 3^4 \Rightarrow x^4 = \left(\frac{3}{2}\right)^4 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ oder $x = -\frac{3}{2}$.

zu c) $32 \cdot 2^{x-1} = 4^{x+1} \Rightarrow 2^5 \cdot 2^{x-1} = 2^{2 \cdot (x+1)} \Rightarrow 2^{x+4} = 2^{2x+2} \Rightarrow x+4 = 2x+2 \Rightarrow x = 2$

zu d) $10 \cdot 4^{2x+1} = 640 \Rightarrow 4^{2x+1} = 4^3 \Rightarrow 2x+1 = 3 \Rightarrow x = 1$

zu e) $-6 + 2 \cdot x^4 = 156 \Rightarrow 2 \cdot x^4 = 162 \Rightarrow x^4 = 81 \Rightarrow x^4 = 3^4 \Rightarrow x = 3$ oder $x = -3$

zu f) $3 \cdot 5^{3x-6} = 375 \Rightarrow 5^{3x-6} = 125 \Rightarrow 5^{3x-6} = 5^3 \Rightarrow 3x-6 = 3 \Rightarrow x = 3$

zu g) $6 = x^3 - 36x + 6 \Rightarrow 0 = x^3 - 36x \Rightarrow 0 = x \cdot (x-6) \cdot (x+6)$
 $\Rightarrow x = 0$ oder $x = 6$ oder $x = -6$

Die Summe aller Lösungen ist $-4+(1,5-1,5)+2+1+(3-3)+3+(6-6) = 2(ES)$.

4 Bestimme die Lösungsmenge mit quadratischer Ergänzung.

Beispiel: $11 = x^2 + 4x + 6$.

Setze $a = x$ und $b = 2$, dann ist wegen $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b$: $(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$.

Also kann man obige Gleichung schreiben als $11 = (x+2)^2 + 2$ bzw. $(x+2)^2 = 9$.

Daraus folgt: $3 = x+2$ oder $-3 = x+2$ bzw. $x=1$ oder $x = -5$.

a) $4x^2 + 16x + 25 = 18$ b) $x^2 - 6x + 25 = 32$ c) $9x^2 + 12x + 2 = -2$

d) $36x^2 + 12x + 1 = -1$

Lösung

zu a) $4x^2 + 16x + 25 = 18 \Rightarrow 4 \cdot (x^2 + 4x + 4) + 9 = 18 \Rightarrow 4(x+2)^2 = 3^2$
 $\Rightarrow x+2 = \frac{3}{2}$ oder $x+2 = -\frac{3}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ oder $x = -\frac{7}{2}$

zu b) $x^2 - 6x + 25 = 32 \Rightarrow (x^2 - 6x + 9) + 16 = 32 \Rightarrow (x-3)^2 = 16$
 $\Rightarrow x-3 = 4$ oder $x-3 = -4 \Rightarrow x = 7$ oder $x = -1$

zu c) $9x^2 + 12x + 2 = -2 \Rightarrow 9\left(x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) - 2 = -2 \Rightarrow 9\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$

zu d) $36x^2 + 12x + 1 = -1 \Rightarrow 36\left(x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{36}\right) = -1 \Rightarrow 36\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 = -1$
 \Rightarrow keine Lösung

Die Summe aller Lösungen ganzzahlig gerundet ist $\left(-\frac{1}{2} - \frac{7}{2}\right) + (7-1) - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \approx 1$
(JU).

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.



5 Bestimme mit dem Intervallhalbierungsverfahren die ersten vier Intervallmitten.

Beispiel: $0 = -3 + 16^x =: f(x)$

Startintervall $[0; 2]$, Mitte: $1 \Rightarrow$

Schritt 1: $f(0) = -2$; $f(2) = 253$; $f(1) = 13 \Rightarrow$ Lösung in $[0; 1]$ mit Mitte: $1/2$

Schritt 2: $f(0) = -2$; $f(1) = 13$; $f(1/2) = 1 \Rightarrow$ Lösung in $[0; 1/2]$ mit Mitte: $1/4$

Schritt 3: $f(0) = -2$; $f(1/2) = 1$; $f(1/4) = -1 \Rightarrow$ Lösung in $[1/4; 1/2]$ mit Mitte: $3/8$.

a) $0 = -3 + 3x^2 - x^3 =: f(x)$ und Startintervall $[0; 2]$

b) $0 = -1 + 1/x - x^2 =: f(x)$ und Startintervall $[0,5; 2,5]$

Lösung

zu a)

Schritt 1: $f(0) = -3$, $f(2) = 1$, $f(1) = -1 \Rightarrow$ Lösung $\in [1,2]$ mit Mitte $\frac{3}{2}$

Schritt 2: $f(1) = -1$, $f(2) = 1$, $f(\frac{3}{2}) = \frac{3}{8} \Rightarrow$ Lösung $\in [1; \frac{3}{2}]$ mit Mitte $\frac{5}{4}$

Schritt 3: $f(1) = -1$, $f(\frac{3}{2}) = \frac{3}{8}$, $f(\frac{5}{4}) = -\frac{17}{64} \Rightarrow$ Lösung $\in [\frac{5}{4}, \frac{3}{2}]$

mit Mitte $\frac{11}{8}$

zu b)

Schritt 1: $f(0,5) = 0,75$, $f(2,5) = -6,85$, $f(1,5) = -\frac{31}{12}$

\Rightarrow Lösung $\in [0,5; 1,5]$ mit Mitte 1

Schritt 2: $f(0,5) = 0,75$, $f(1,5) = -\frac{31}{12}$, $f(1) = -1$

\Rightarrow Lösung $\in [0,5; 1]$ mit Mitte $0,75$

Schritt 3: $f(0,5) = 0,75$, $f(1) = -1$, $f(0,75) = -\frac{11}{48}$

\Rightarrow Lösung $\in [0,5; 0,75]$ mit Mitte $\frac{5}{8}$

Die Summe der letzten Intervallmitten ist $\frac{11}{8} + \frac{5}{8} = 2$ (GE)

6 Die Lösungen $(x|y)$ bzw. $(x|y|z)$ sind nicht eindeutig, bestimme die Lösungsgeraden.

a) $x - 2y = 2$ und $2x - 4y = 4$ b) $3x - 2y = 0$ und $6x - 4y + 2 = 2$

c) $x - 2y + z = 0$ und $2x + y + 3z = 6$ und $3x - y + 4z = 6$

d) $x - y + 4z = 11$ und $2x + 2y + z = 9$ und $-x - 3y + 3z = 2$

Lösung

In allen Fällen handelt es sich um lineare Gleichungssysteme, die wir mit dem Gauß-Algorithmus lösen.

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.



zu a)

Es handelt sich um das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Umformungen mit dem Gauß-Algorithmus

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Lösbarkeit ist gegeben mit beliebigem $y = s$ und $x = 2 + 2s$, also einer

Lösungsgeraden $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. $y = -1$ bei $x = 0$.

Zu b)

Es handelt sich um das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Umformungen mit dem Gauß-Algorithmus

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Lösbarkeit ist gegeben mit beliebigem $y = s$ und $x = \frac{2}{3}s$, also einer

Lösungsgeraden $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$. $y = 0$ bei $x = 0$.

zu c)

Es handelt sich um das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Umformungen mit dem Gauß-Algorithmus

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ 3 & -1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 6 \\ 0 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Lösbarkeit ist gegeben mit beliebigem $z = s$, woraus

$$5y + s = 6 \Leftrightarrow y = \frac{6}{5} - s \cdot \frac{1}{5} \quad \text{und} \quad x - \frac{12}{5} + s \cdot \frac{2}{5} + s = 0 \Leftrightarrow x = \frac{12}{5} - s \cdot \frac{7}{5} \quad \text{folgt.}$$

Fassen wir diese Komponentengleichungen in Vektorschreibweise zusammen, so ergibt sich die Lösungsgerade:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{5} \\ \frac{6}{5} \\ \frac{6}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -\frac{7}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad y = \frac{6}{7} \quad \text{bei} \quad x = 0.$$

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.



Zu d)

Es handelt sich um das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Umformungen mit dem Gauß-Algorithmus

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 9 \\ -1 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 11 \\ 0 & 4 & -7 & -13 \\ 0 & -4 & 7 & 13 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 11 \\ 0 & 4 & -7 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Lösbarkeit ist gegeben mit beliebigem $z = s$, woraus

$$4y - 7s = 13 \Leftrightarrow y = \frac{13}{4} + s \cdot \frac{7}{4} \quad \text{und} \quad x - \frac{13}{4} - s \cdot \frac{7}{4} + s \cdot 4 = 11 \Leftrightarrow x = \frac{57}{4} - s \cdot \frac{9}{4} \quad \text{folgt.}$$

Fassen wir diese Komponentengleichungen in Vektorschreibweise zusammen, so ergibt sich die Lösungsgerade:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{57}{4} \\ \frac{13}{4} \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -\frac{9}{4} \\ \frac{7}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{bei} \quad y = \frac{43}{3} \quad \text{bei} \quad x = 0$$

$$\text{Die Summe der } y\text{-Komponenten ist} \quad -1 + 0 + \frac{6}{7} + \frac{43}{3} = \frac{298}{21} \approx 14 \quad (\text{ND}).$$

7 Stelle fest, ob es keine, eine oder viele Lösungen gibt.

- a) $x - 2y = 2$ und $2x - 4y = 6$ b) $3x - 2y = 1$ und $6x - 2y + 2 = 6$
c) $x - 2y = 0$ und $-3x + 6y + 6 = 6$
d) $x - 2y + z = 0$ und $2x + y + 3z = 6$ und $7x + y + 10z = 18$
e) $x - y + 4z = 11$ und $2x + 2y + z = 9$ und $-6x - 6y + 3z = 2$
f) $x - y + 4z = 8$ und $2x + 2y + z = 10$ und $-x - 6y + z = -12$

Lösung

In allen Fällen handelt es sich um lineare Gleichungssysteme, deren Einzelgleichungen durch „und“ verknüpft sind. Diese führen wir durch entsprechende Operationen unter Erhaltung der Lösungsmengen in neue ebenfalls mit „und“ verknüpfte Gleichungen über, die bzgl. der Lösungen leichter auszuwerten sind.

zu a)

Aus der ersten Gleichung folgt $x = 2 + 2y$, dies eingesetzt in die zweite Gleichung ergibt $4 + 4y - 4y = 6 \Leftrightarrow 4 = 6$. Die letzte Teilaussage ist aber für alle x und y falsch, so dass es keine Lösung gibt.

zu b)

Aus der ersten Gleichung folgt $x = \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}$, dies in die zweite Gleichung eingesetzt ergibt $4y + 2 - 2y + 2 = 6 \Leftrightarrow 2y = 2 \Leftrightarrow y = 1$. Hieraus folgt durch Einsetzen von y in die erste Gleichung $x = 1$. Es gibt also eine eindeutige Lösung des Gleichungssystems..

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.



zu c)

Aus der ersten Gleichung folgt $x = 2y$, dies eingesetzt in die zweite Gleichung ergibt $-6y + 6y + 6 = 6 \Leftrightarrow 6 = 6$. Das ist aber immer wahr. Also kann zur Lösbarkeit für y eine beliebige Zahl s gewählt werden, wenn nur $x = 2s$ ist, d.h. es gibt beliebig viele Lösungen.

zu d)

Aus der ersten Gleichung folgt $x = 2y - z$, dies in die zweite Gleichung eingesetzt ergibt $4y - 2z + 3z = 6 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}z$, woraus $x = 3 - \frac{3}{2}z$ folgt. Beides in die

letzte Gleichung eingesetzt ergibt $7 \cdot (3 - \frac{3}{2}z) + \frac{3}{2} - \frac{1}{4}z + 10z = 18$, also $z = 6$.

Rückwärts oben eingesetzt muss dann $x = -6$ und $y = 0$ sein, es gibt also genau eine Lösung.

zu e)

Aus der ersten Gleichung folgt $x = 11 + y - 4z$. dies in die zweite Gleichung eingesetzt ergibt $2(11 + y - 4z) + 2y + z = 9 \Leftrightarrow y = -\frac{13}{4} + \frac{7}{4}z$, woraus $x = \frac{31}{4} - \frac{9}{4}z$

folgt. Beides in die letzte Gleichung eingesetzt ergibt

$$-6\left(\frac{31}{4} - \frac{9}{4}z\right) - 6\left(-\frac{13}{4} + \frac{7}{4}z\right) + 3z = 2, \text{ also } z = \frac{29}{6}.$$

Rückwärts oben eingesetzt muss dann $x = -\frac{25}{8}$ und $y = \frac{125}{24}$ sein, es gibt also genau eine Lösung.

zu f)

Aus der ersten Gleichung folgt $x = 8 + y - 4z$. dies in die zweite Gleichung eingesetzt ergibt $2(8 + y - 4z) + 2y + z = 9 \Leftrightarrow y = -\frac{6}{4} + \frac{7}{4}z$, woraus $x = \frac{26}{4} - \frac{9}{4}z$

folgt. Beides in die letzte Gleichung eingesetzt ergibt

$$-\left(\frac{26}{4} - \frac{9}{4}z\right) - 6\left(-\frac{6}{4} + \frac{7}{4}z\right) + z = -12, \text{ also } z = 2.$$

Rückwärts oben eingesetzt muss dann $x = 2$ und $y = 2$ sein, es gibt also genau eine Lösung.

Es liegt also 1 nicht-lösbares, 4 eindeutig lösbares und 1 mehrdeutig lösbares Gleichungssystem vor, die Lösungszahl mit diesen Anzahlen entsprechenden Ziffern ist 141(SP).

- 8** Eine Firma stellt quaderförmige, oben offene Kartons unterschiedlicher Größe her. Der Boden ist immer quadratisch und die Höhe ist um 2 dm kürzer als die Kantenlänge L des Bodens. Berechne die Kantenlänge L eines Kartons mit der Oberfläche $A = 16,8 \text{ dm}^2$.

Hinweis: Wende nötigenfalls quadratische Ergänzung oder das Intervallhalbierungsverfahren an und bestimme dann L auf einen Zentimeter genau.



Lösung

$$\begin{aligned}
A &= L^2 + 4 \cdot L \cdot (L - 2) = 5L^2 - 8L \\
&\Rightarrow 16,8 = 5L^2 - 8L \\
&\Rightarrow 3,36 = L^2 - 1,6L \\
&\Rightarrow 3,36 + 0,64 = L^2 - 1,6L + 0,64 \Leftrightarrow 4 = L^2 - 1,6L + 0,8^2 \\
&\Rightarrow 4 = (L - 0,8)^2 \\
&\Rightarrow 2 = L_1 - 0,8 \quad \text{oder} \quad -2 = L_2 - 0,8 \\
&\Rightarrow L_1 = 2,8 \quad \text{oder} \quad L_2 = -1,2
\end{aligned}$$

Sinn macht nur die positive Lösung L_1 .

Die Kantenlänge ist $L = 28\text{cm}$ (IE).

- 9 Die Ausgangssituation ist wie in Aufgabe 8, aber nun ist ein Volumen $V = 20\text{ dm}^3$ vorgegeben.

Hinweis: Lösungsweg wie in Aufgabe 8.

Lösung

$$\begin{aligned}
V &= L^2 \cdot (L - 2) = L^3 - 2L^2 \\
&\Rightarrow 20 = L^3 - 2L^2
\end{aligned}$$

Betrachte die Funktion $f(L) = 20 - L^3 + 2L^2$.

Wir wenden das Intervallhalbierungsverfahren mit den Startwerten

$L_u = 3,4\text{ dm}$ und $L_o = 3,8\text{ dm}$ an.

- Schritt: $f(3,4) = 3,816$, $f(3,8) = -5,992$, Mitte: $f(3,6) = -0,736$,
- Schritt: $f(3,4) = 3,816$, $f(3,6) = -0,736$, Mitte: $f(3,5) = 1,625$,
- Schritt: $f(3,5) = 1,625$, $f(3,6) = -0,736$, Mitte: $f(3,55) = 0,466125$

Die Kantenlänge ist auf einen cm genau $L = 36\text{ cm}$ (LE)

Lösungen mit Kennsilben

2	35	36	18	3	1	2	20	132	19	14	28	141	16
GE	AL	LE	BU	LE	JU	ES	RH	AN	ND	ND	IE	SP	DE

Lösungswort: BUNDESJUGENDSPIELE

10 Expertenaufgabe

Beim GPS befindet sich der Empfänger bei einem Punkt mit den Koordinaten $(x|y|z)$. Der Empfänger empfängt die Koordinaten $(a|b|c)$ sowie die Entfernungen D mehrerer Satelliten und berechnet daraus seine Koordinaten. In einem vereinfachten Zahlenbeispiel empfängt er für vier Satelliten folgende Koordinaten und Distanzen D :

Satellit 1: $(a|b|c) = (3|0|0)$ und $D = 5$

Satellit 2: $(a|b|c) = (0|3|0)$ und $D = 5$

Satellit 3: $(a|b|c) = (1|2|2)$ und $D = 3$

Satellit 4: $(a|b|c) = (-2|1|2)$ und $D = 3$

Berechne die Koordinaten $(x|y|z)$ des Empfängers.

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.



Lösung

Vorüberlegungen:

Alle Punkte mit einer festen Entfernung zu einem Satelliten liegen auf einer Kugeloberfläche, deren Radius gleich der Entfernung ist. Nimmt man einen zweiten Satelliten hinzu, ist die Menge aller Punkte, die zu jedem der beiden Satelliten eine vorgegebene Entfernung haben, ein Kreis im Raum, dessen Normale die Verbindungslinie der beiden Kugelmittelpunkte ist. Wenn ein dritter Satellit nicht auf der Verbindungslinie der ersten beiden liegt, so ergeben sich mit seiner „Entfernungs“-Kugeloberfläche zwei Schnittpunkte, d.h. mit der Entfernung zu drei Satelliten kann die Position noch nicht eindeutig bestimmt werden. Es wird also entweder ein vierter Satellit gebraucht, der jedoch nicht in der Ebene der ersten drei Satelliten liegen darf oder man kann auf Grund einer anderen Bedingung einen der beiden Punkte aussondern.

Aus der Position der Satelliten und den Entfernungen ergeben sich für den gesuchten Punkt $P(x|y|z)$ die folgenden Bedingungen:

$$(i) \sqrt{(x-3)^2+y^2+z^2} = 5 \Rightarrow (x-3)^2+y^2+z^2 = 25 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-6x = 16$$

$$(ii) \sqrt{x^2+(y-3)^2+z^2} = 5 \Rightarrow x^2+(y-3)^2+z^2 = 25 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-6y = 16$$

Aus (i)-(ii) ergibt sich $-6x+6y = 0 \Rightarrow x = y$

Die ersten beiden Entfernungsbedingungen schränken den gesuchten Punkt also auf $P(x|x|z)$ und die Entfernungsbedingung

$$(i') (x-3)^2+x^2+z^2 = 25 \Leftrightarrow 2x^2-6x+z^2 = 16 \text{ ein.}$$

Bei der Schnittmenge handelt es sich um einen Kreis.

Nehmen wir die nächste Entfernungsbedingung hinzu und setzen entsprechend ein, so ergibt sich

$$(iii') \sqrt{(x-1)^2+(x-2)^2+(z-2)^2} = 3 \\ \Rightarrow 2x^2-6x+5+z^2-4z+4 = 9 \Leftrightarrow 2x^2-6x+z^2-4z = 0$$

Aus (i')-(iii') folgt $4z = 16 \Leftrightarrow z = 4$. Dieses z in (iii') eingesetzt ergibt $x = 0$ oder $x = 3$. Also sind nach den ersten drei Bedingungen die Punkte $(0|0|4)$ oder $(3|3|4)$ möglich, aber aus der letzte Entfernungsbedingung folgt:

$$(iv) (0+2)^2+(0-1)^2+(4-2)^2 = 9 \text{ aber } (3+2)^2+(3-1)^2+(4-2)^2 \neq 9$$

Der gesuchte Punkt ist also $P(x|y|z) = P(0|0|4)$.

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.