Fit in Mathe

Musterlösungen 1

Mai

Klassenstufe 9

Thema	**Körper ohne π**

❶ Ein rechtwinkliges Dreieck besteht aus den Seiten a, b und c, wobei der Seite c ein rechter Winkel gegenüberliegt. Berechne jeweils die Länge der fehlenden Seite(n).

a) $a=3\,;b=4$ b) $a=\sqrt{7}\,;c=4$ c) $b=\sqrt{5}\,;c=3$ d) $a=b\,;c=\sqrt{8}$

__Lösung__

zu a) $c = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$ zu b) $b = \sqrt{4^2-(\sqrt{7})^2} = \sqrt{9} = 3$

zu c) $a = \sqrt{3^2-(\sqrt{5})^2} = \sqrt{4} = 2$ zu d) $a^2+b^2 = 2a^2 = (\sqrt{8})^2 \Rightarrow a = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow b = 2$

Die Summe der Seitenlängen aller zu berechnenden Seiten ist 5+3+2+(2+2) ist 14(ME).

❷ Eine 48m hohe Fichte ist in18m Höhe abgeknickt (nicht abgebrochen). Wie weit liegt die Spitze vom Stamm entfernt?

__Lösung__

Die beiden Teile des Stammes, d.i. der noch senkrecht stehende Teil mit 18 m und der abgeknickte mit 30 m bilden mit dem Boden ein rechtwinkliges Dreieck. Der Abstand von der Wurzel zur Auflagestelle der Spitze ist $x = \sqrt{30^2-18^2} = \sqrt{576} = 24$

Der Abstand in m ist also 24 m (IN).

❸ Auf ein 10m breites Haus soll ein Satteldach errichtet werden, das eine Dachneigung von 45° besitzt.
Wie lang ist eine schräge Seite des Dachgiebels?

__Lösung__

Eine schräge Dachgiebelseite x, die halbe Hausbreite von 5 m und die Höhe des Dachgiebels bilden ein rechtwinkliges Dreieck, das zudem gleichschenklig sein muss, weil wegen der Winkelsumme im Dreieck von 180° auch die Höhe mit der schrägen Seite einen Winkel von 45° einschließen muss. Die Höhe ist demnach ebenfalls 5 m lang. Also ist $x = \sqrt{5^2+5^2} = \sqrt{50} \approx 7$

Die Länge auf ganze m gerundet ist 7 (UN)

❹ In einer Spielklötzchenfabrik sollen senkrechte Prismen mit einer Kantenlänge von 7cm hergestellt werden, wobei die Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck ist. (Taschenrechner erlaubt)

a) Berechne das Volumen des Prismas, um herauszufinden, wie viel Holz zur Produktion eines Klötzchens benötigt wird.
(Runde die Lösung auf ganze cm³).

b) Um die Holzklötzchen haltbarer zu machen, werden sie mit einem dünnen Lack beschichtet. 1m² Lack kostet 4,20€. Wie teuer ist dies pro Klötzchen ?

c) Jedes Prisma soll einzeln in einem kleinstmöglichen quaderförmigen Karton verpackt werden. Bestimme das Volumen und die Oberfläche des Kartons. Bestimme das Luftvolumen im Inneren des Kartons nach Verpacken eines Prismas.
(Runde auf ganze cm² bzw. cm³)

Lösung
zu a)

Die Höhe einer dreieckigen Grundfläche ist $\sqrt{7^2-(\frac{7}{2})^2} = \frac{\sqrt{3 \cdot 7^2}}{2} = 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, also die Grundfläche $G = 7 \cdot 7 \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = 7^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$ und demnach das Volumen

$$V = G \cdot h = 7^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 7 = 7^3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 149\, cm^3$$

zu b)

Die Oberfläche ist $2 \cdot 7^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot 7^2 = (\frac{\sqrt{3}}{2}+3) \cdot 7^2 cm^2 = 10^{-4} \cdot 7^2 \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2}+3)\, m^2$, demnach die Kosten pro Klötzchen $10^{-4} \cdot 7^2 \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2}+3) \cdot 4{,}2 \approx 0{,}08\,€$

zu c)

Die Seitenlängen des Kartons sind 7, 7 und $7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, demnach ist das Volumen

$$V = 7^3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 297\, cm^3$$

Das Luftvolumen ist $7^3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 7^3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 7^3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 149\, cm^3$ also das halbe Prismavolumen.

Die Oberfläche des Kartons ist $2 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot 7^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cdot 7^2 \cdot (1 + 2 \cdot \sqrt{3}) \approx 437\, cm^2$

Das Luftvolumen auf ganze cm³ gerundet in einem Karton ist 149 (GS).

❺ Auf einem Kirchturm mit quadratischer Grundfläche soll ein symmetrisches pyramidenförmiges Dach errichtet werden. Die Grundkante des Dachs beträgt 12m; das Dach soll 8m hoch sein.
Ermittle, wie viele Ziegel für ein solches Dach gekauft werden müssen, wenn 1m² Dachfläche 52 Ziegel benötigt.

Lösung

Die vier Dachflächen sind zum gemeinsamen Mittelpunkt gekippte Dreiecke, deren Höhe sich berechnet als $h = \sqrt{6^2+8^2} = \sqrt{100} = 10$, also ist die Fläche aller 4 Pyramidenseiten $F = 4 \cdot \frac{12 \cdot 10}{2} = 240\,m^2$. Wenn für einen m² 52 Ziegel benötigt werden, braucht man insgesamt $52 \cdot 240 = 12480$ Ziegel.

Die Anzahl der benötigten Ziegel ist 12480 (AE).

❻ Ein Balancierkünstler hat zwischen zwei Bäumen, die sich 8m voneinander entfernt befinden, ein Gummiseil gespannt. Wenn der Künstler sich exakt in der Mitte des Seils befindet und die Seilenden auf gleicher Höhe befestigt sind, verlängert sich das Seil um 20cm. Wie weit unter den Befestigungspunkten befindet sich der Künstler.

Lösung

Das waagerechte Seil bildet zusammen mit dem durch das Gewicht des in der Seilmitte stehenden Künstlers ein gleichschenkliges Dreieck zusammengesetzt aus zwei gleichen rechtwinkligen Dreiecken. Eine Kathete eines dieser Dreiecke ist 4 m, die andere entspricht der gesuchten Auslenkung nach unten x und die dritte der halben gedehnten Seillänge 4,1 m. Daraus folgt

$$x = \sqrt{4{,}1^2 - 4^2} = \sqrt{16{,}81 - 16} = \sqrt{0{,}81} = 0{,}9\,m\ .$$

Die Lösung in cm ist 90 (US).

❼ Auf der Erde (in diesem Fall wird diese als Kugel betrachtet) kann ein Augenpaar, das sich 1,7m über dem Boden befindet, 4.654 m weit sehen.
Bestimme den Durchmesser der Erde (Lösung gerundet auf km).

Lösung

Der von den Augen ausgehende Sehstrahl entspricht für den weitest entfernten Punkt einer Tangente zur Kugeloberfläche bzw. einer Tangente an einem Kreis, der durch Schneiden mit einer Ebene definiert durch den Augenpunkt, dem anvisierten Punkt und dem Kugelmittelpunkt zustande kommt. Der Radius R dieses Kreis entspricht dem Kugelradius. Die Tangente am Kreis steht senkrecht auf dem Radius der Kreises an dieser Stelle. Wir können deswegen mit Pythagoras ansetzen:

$$(R+1{,}7)^2 = 4654^2 + R^2 \;\Leftrightarrow\; 3{,}4\,R + 2{,}89 = 21659716$$

$$\Rightarrow\; R = \frac{21659716 - 2{,}89}{3{,}4}$$

$$\Rightarrow\; R \approx 6370504\,m$$

$$\Rightarrow\; D \approx 12741\,km$$

Auf ganze km gerundet beträgt der Durchmesser 12741 (SE)

❽ Ermittle die Länge der Raumdiagonalen eines Quaders mit den Kantenlängen 2, 4 und 4.

Lösung

Angenommen die Kantenlängen der Grundfläche seien 2 und 4, dann ist die Länge der Diagonalen $\sqrt{2^2+4^2}$. Nun betrachten wir die Querschnittsfläche des Quaders entlang dieser Diagonalen und der zugehörigen Höhe des Quaders, hier 4. Die Diagonale dieser Querschnittsfläche ist die gesuchte Raumdiagonale

$$\sqrt{(\sqrt{2^2+4^2})^2+4^2} = \sqrt{2^2+4^2+4^2} = \sqrt{36} = 6$$

Man sieht, dass es egal ist, von welcher Grundfläche man ausgeht, es ergibt sich immer derselbe obige Wert.

Die Länge ist also 6 (RU) .

❾ Bestimme allgemein das Volumen eines Tetraeders mit der Kantenlänge a . (Tipp: Die Seitenhalbierenden in einem Dreieck schneiden sich im Verhältnis 2:1)

Lösung

Ein Tetraeder hat 6 Kanten gleicher Länge a bzw. 4 Oberflächen, die jeweils gleichseitige Dreiecke sind. Stellen wir uns die 3 außerhalb der Ebene einer Dreiecksfläche liegenden Kanten senkrecht auf diese Fläche projiziert vor. Diese Projektionen bilden entsprechend verlängert die Seitenhalbierenden des Dreiecks. Da es sich um ein gleichseitiges Dreieck handelt, ist die Länge einer Seitenhalbierenden $s = \sqrt{a^2-(\frac{a}{2})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot a$. Wegen der Gleichschenkligkeit ist diese gleichzeitig die Höhe, so dass man für die Fläche der Seite hat $G = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot a^2$. Der 4. nicht in der Deckfläche liegende Punkt liegt senkrecht über dem Schnittpunkt der Seitenhalbierenden, so dass man unter Verwendung des Hinweises für seinen Abstand h zur Deckfläche die Beziehung hat

$$h = \sqrt{a^2-(\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot a)^2} = a\cdot\sqrt{1-\frac{1}{3}} = a\cdot\sqrt{\frac{2}{3}} \ .$$

Das Volumen eines spitzen Körpers ist $V = \frac{G\cdot h}{3}$, daher hier

$$V = a^3\cdot\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{3\cdot 4\cdot\sqrt{3}} = a^3\cdot\frac{\sqrt{2}}{12} \ .$$

Für $V = 2{,}25\cdot\sqrt{2}$ *ist* $\frac{a^3}{12} = 2{,}25 \Leftrightarrow a^3 = 27 \Leftrightarrow a = 3\,(NG)$.

Lösungen mit Kennsilben

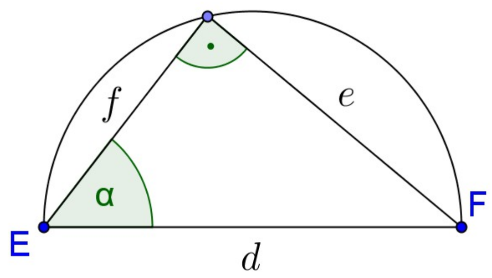
13460 AB	3 NG	24 IN	162 FA	14 ME	12741 SE	7 UN	5 LL	90 US	13458 DO	4 SE	149 GS	6 RU	12480 AE

Lösungswort: MEINUNGSAEUSSERUNG

❿ <u>Expertenaufgabe</u>

Über den Seiten eines beliebigen Dreiecks ABC mit rechtem Winkel bei C werden zueinander ähnliche gleichschenklige Dreiecke derart konstruiert, dass die Seiten a, b und c jeweils die Basis der neu entstandenen Dreiecke darstellen. Beweise allgemein, dass die Summe der Flächen der Dreiecke über den Seiten a und b genauso groß wie die Fläche des Dreiecks über c ist.

<u>Lösung</u>



Errichte über d ein Dreieck mit einem rechten Winkel an der Spitze. Die Fläche des Dreiecks ist wegen des rechten Winkels $F_D = \frac{e \cdot f}{2}$ und es ist $e = d \cdot \sin(\alpha)$ und $f = d \cdot \cos(\alpha)$, also $F_D(d, \alpha) = \frac{1}{2} \cdot d^2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$, d.h. die Dreiecksfläche ist abhängig von der Grundseite und dem Winkel α.

Wenn wir nun, wie in der Aufgabenstellung gefordert, über den Seiten a,b und c eines rechtwinkligen Dreiecks ähnliche Dreiecke errichten, d.h. alle haben denselben Winkel α, so ist ihre Fläche $F_D(a, \alpha), F_D(b, \alpha) bzw. F_D(c, \alpha)$.
Hiermit ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} F_D(c, \alpha) &= \frac{1}{2} c^2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \\ &= \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \quad (wg\ Pythagoras) \\ &= \frac{1}{2} a^2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) + \frac{1}{2} b^2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \\ &= F_D(a, \alpha) + F_D(b, \alpha) \end{aligned}$$