Fit in Mathe

Musterlösung 1

März Klassenstufe 10

Thema	**Potenzgesetze**

❶ Schreibe die Ergebnisse als Produkt eines Dezimalbruches zwischen 1 und 10 und einer Zehnerpotenz

a) 123000 b) 0,000034 c) 20000 · 5100000 d) 0,0003 · 0,0005 · 3000

Lösung

zu a) $1{,}23\cdot 10^{5}$ zu b) $3{,}4\cdot 10^{-5}$ zu c) $1{,}02\cdot 10^{11}$ zu d) $4{,}5\cdot 10^{-4}$

Die Summe aller Exponenten in den Zehnerpotenzen ist 7.

❷ Schreibe als Dezimalbruch

a) $2{,}3007\cdot 10^{5}$ b) $5001{,}02\cdot 10^{-5}$ c) $-1\cdot 10^{6}$ d) $24{,}2\cdot 10^{-6}$ e) $0{,}000045\cdot 10^{10}$

Lösung

zu a) 230070 zu b) $0{,}0500102$ zu c) -1000000 zu d) $0{,}000242$

zu e) 450000

Die Anzahl der Nullen in allen Ergebnissen ist 22.

❸ Schreibe als Potenz mit kleinstmöglicher natürlicher Basis!

a) 81 b) 256 c) 729 d) 0,0001 e) 0,0016 f) 0,015625 g) $\frac{1}{2401}$

Lösung

zu a) 3^{4} zu b) 2^{8} zu c) 3^{6} zu d) 10^{-4} zu e) 5^{-4} zu f) 2^{-6} zu g) 7^{-4}

Die Summe aller Exponenten ist 0.

❹ Löse die folgenden Potenzgleichungen

a) $10^{2}\cdot 10^{-3}\cdot 10^{x}=10^{0}$ b) $2^{4}\cdot 2^{x}=2^{2}\cdot 2^{2x}$ c) $(2^{4})^{3}\cdot 2^{x}=(2^{8})^{2}$ d) $10^{x}\cdot 10^{x}=10$

e) $(2^{x})^{2}=\frac{1}{2}$ f) $3^{4}\cdot 2^{x}=3^{x}\cdot 2^{4}$ g) $3^{x}\cdot 2^{3}=6^{3}$ h) $1000\cdot 2^{-x}=5^{x}$

Lösung

zu a) $x=1$ zu b) $x=2$ zu c) $x=4$ zu d) $x=\frac{1}{2}$ zu e) $x=-\frac{1}{2}$ zu f) $x=4$

zu g) $x=3$ zu h) $x=3$

Die Summe aller x-Werte ist 17.

Fit in Mathe

Musterlösung

März Klassenstufe 10

❺ Stelle mit positivem Exponenten dar und vereinfache ggf.!

a) $\dfrac{a}{a^{-5}}$ b) $2\cdot x^{-2}:y^{-1}$ c) $3^{-\frac{5}{6}}\cdot a^{-\frac{1}{2}}\cdot 3\cdot\dfrac{1}{a^{-3}}$ d) $\dfrac{\dfrac{k^{-2}}{z^{4}}}{\dfrac{k^{3}}{z^{-4}}}$

<u>Lösung</u>

zu a) a^6 zu b) $2:x^2\cdot y$ zu c) $3^{\frac{1}{6}}\cdot a^{\frac{5}{2}}$ zu d) $\dfrac{1}{z^8\cdot k^5}$

Der größte vorkommende Exponent ist 8 .

❻ Schreibe als Potenz

a) $(\sqrt[4]{r})^8$ b) $\sqrt{\sqrt[5]{\sqrt[4]{k^{80}}}}$ c) $(\sqrt[n]{a^9})^{\frac{n}{3}}$ d) $(\sqrt{t^3})^4$ e) $(\sqrt[n]{r^{0,2}})^{5n}$

<u>Lösung</u>

zu a) r^2 zu b) k^2 zu c) a^3 zu d) t^6 zu e) r^1

Die Summe aller Exponenten ist 14.

❼ Welche Zahlen sind gleich?

a) $5^{\frac{1}{3}}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$ c) $\dfrac{1}{5^{-\frac{2}{3}}}$ d) $5^{\frac{2}{6}}$ e) $\sqrt[3]{5}$ f) $\sqrt[3]{5^2}$ g) $(\sqrt[6]{5})^2$ h) $5^{-\frac{2}{6}}$ i) $(5^6)^{\frac{1}{9}}$

<u>Lösung</u>

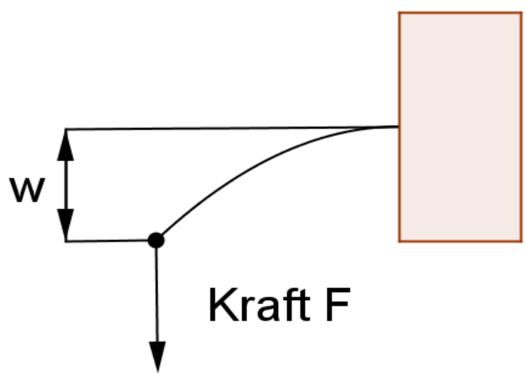
Es gibt nur drei unterschiedliche Zahlen, geschrieben als Potenz zur Basis 5: $5^{\frac{1}{3}}$ in a), d), e), g), $5^{-\frac{1}{3}}$ in b), h) und $5^{\frac{2}{3}}$ in c), f), i).

Die Anzahl unterschiedlicher Zahlen ist 3.

❽ Ein einseitig eingespannter Freiträger der Länge l wird am Ende durch eine Zugkraft F belastet. Die Formel unten gibt die resultierende Durchbiegung w an.
Ermittle den Wert von w in cm!

$$w=\frac{F\,l^3}{3\,E\,I}$$

Zugkraft	F	= 120 kN
Länge	l	= 50 dm
Elastizitäts-Modul	E	= 2 · 10^5 N/mm²
Flächenträgheits-moment	I	= 0,2 · 10^5 cm⁴



Lösung

Nach Einsetzen der Werte in obige Formel: $\dfrac{120\cdot 50^3}{3\cdot 2\cdot 10^5\cdot 0{,}2\cdot 10^5}\quad \dfrac{kN\,dm^3}{\dfrac{N}{mm^2}\,cm^4}$

Mit $\dfrac{kN\,dm^3}{\dfrac{N}{mm^2}\,cm^4}=\dfrac{10^3\,N\,10^3\,cm^3}{\dfrac{N}{10^{-2}\,cm^2}\,cm^4}=\dfrac{10^6\,N\,cm^3}{10^2\,N\,cm^2}=10^4\,cm$ folgt für den Ausdruck:

$$\frac{120\cdot 50^3\cdot 10^4}{3\cdot 2\cdot 10^5\cdot 0{,}2\cdot 10^5}\,cm \;=\; \frac{12\cdot 5^3\cdot 10^8}{3\cdot 2\cdot 2\cdot 10^9}\,cm \;=\; 12{,}5\,cm$$

Die Lösungszahl ist also 12,5 cm.

Die Lösungszahlen in der Reihenfolge der Aufgaben sind:	7	22	0	17	8	14	3	12,5

❾ Expertenaufgabe

Eine geordnete Menge von Potenzen mit wachsendem natürlichem Exponenten $\{q^0, q^1, q^2, q^3, \ldots, q^n, \ldots\}$ mit $q\in R$ nennt man auch eine geometrische Folge.
Aus einer geometrischen Folge lässt sich durch das folgende Bildungsgesetz eine andere Zahlenfolge bilden:

$$\begin{aligned} s_0&=q^0\\ s_1&=q^0+q^1\\ s_2&=q^0+q^1+q^2\\ s_3&=q^0+q^1+q^2+q^3\\ &\ldots \end{aligned}$$

Diese Zahlenfolge $\{s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n, ..\}$ nennt man eine geometrische Reihe.
Zeige, dass für das n-te Glied einer geometrischen Reihe gilt:

$$s_n=1+q^1+q^2+q^3+\ldots+q^n=\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\quad !$$

Einer Legende zufolge wünschte sich der indische Erfinder des Schachspieles als Lohn hierfür von seinem König ein Reiskorn auf dem ersten Feld des Schachbrettes, zwei auf dem zweiten, vier auf dem dritten, acht auf dem vierten und so fort. War er bescheiden?

Lösung

Hinweis: Die Formel ist fehlerhaft. Der Exponent von q rechts ist $n+1$ und nicht n .

Zum Nachweis der Formel $s_n=\dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$ schreibe untereinander:

$$s_n = 1 + q^1 + q^2 + q^3 + \ldots + q^n$$
$$q\,s_n = \quad q^1 + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + q^{n+1}$$

Die zweite Zeile ist die mit q multiplizierte erste und nur der Deutlichkeit halber ein wenig nach rechts abgerückt, damit gleiche Potenzen untereinander zu stehen kommen.

Subtrahiere dann die zweite Zeile von der ersten. Die meisten Potenzen von q heben sich weg und es bleibt:

$s_n \cdot (1-q) = 1 - q^{n+1}$ oder $s_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} = \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$, was bewiesen werden sollte.

Bezogen auf die Schachspiellegende ist $q=2$ und $s_{63} = 2^{64}-1$.

Es ist aber $2^{64}-1 \approx 1{,}8448 \cdot 10^{19}$.

Ein Reiskorn wiegt etwa $2{,}5 \cdot 10^{-2}\ g$, so dass die fragliche Anzahl insgesamt $4{,}6117 \cdot 10^{11}\ t$ wöge.

Die Welternte an Reis beträgt größenordnungsmäßig etwa $5 \cdot 10^8\ t$.

Der clevere Erfinder hatte sich also die Welternten von etwa 1000 Jahren gewünscht.