Fit in Mathe

Musterlösungen 1

März Klassenstufe 11

Thema **Grenzwerte**

❶ Gegeben sind folgende Zahlenfolgen

a) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$ b) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ c) $1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}, \ldots$

d) $q^0, q^1, q^2, q^3, q^4, \ldots$ mit $q \in R \; und \; |q|<1$

Gegen welchen Grenzwert bewegen sie sich?

Lösung

zu a) Grenzwert ist 0; zu b) Grenzwert ist 0; zu c) Grenzwert ist 2;
zu d) Grenzwert ist 0

Die Summe der Beträge aller gesuchten Grenzwerte ist 2.

❷ Berechne - wenn möglich - die Grenzwerte!

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2+4x^3}{1+x+x^3}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^2+4x^3}{1+x+x^3}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2-4|x|x}{2x^2}$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2-4|x|x}{2x^2}$

Lösung

zu a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2+4x^3}{1+x+x^3} = 4$ zu b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2+4x^3}{1+x+x^3} = 4$

zu c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2-4|x|x}{2x^2} = -2$ zu d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2-4|x|x}{2x^2} = 2$

Die Summe der Beträge aller existierenden Grenzwerte ist 8 .

❸ Berechne – wenn möglich - die Grenzwerte folgender Funktionen

1) $f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$ 2) $g(x)=\frac{x^2+2\sqrt{3}x+3}{3-x^2}$ 3) $h(x)=\frac{x^2+x-6}{x+3}$ 4) $k(x)=\frac{3-2x^2}{4x^2}$

a) $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to+\sqrt{3}} g(x)$ c) $\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}} g(x)$ d) $\lim\limits_{x\to-3} h(x)$ e) $\lim\limits_{x\to 0} k(x)$

Lösung

zu a) $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = -2$ zu b) $\lim\limits_{x\to+\sqrt{3}} g(x) = +\infty \; (kein\; Grenzwert)$

zu c) $\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}} g(x) = 0$ zu d) $\lim\limits_{x\to-3} h(x) = -5$ zu e) $\lim\limits_{x\to 0} k(x) = +\infty \; (kein\; Grenzwert)$

Die Summe der Beträge aller existierenden Grenzwerte ist 7.

❹ Eine Funktion $f(x)$ ist abschnittsweise folgendermaßen definiert

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3 & \textit{für } x\leq 1{,}5 \\ \frac{1}{2}x-\frac{3}{2} & \textit{für } 1{,}5<x\leq 5 \\ \frac{2}{3-x} & \textit{für } x>5 \end{cases}$$

d.h. der Definitionsbereich sind die reellen Zahlen.
Berechne -wenn möglich- die Grenzwerte a) $\lim\limits_{x\to 1{,}5} f(x)$ und b) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$

Lösung

zu a) $\lim\limits_{x\to 1{,}5} f(x)=-0{,}75$ zu b) $\lim\limits_{x\uparrow 5} f(x)=\ 1$ und $\lim\limits_{x\downarrow 5} f(x)=\ -1$, rechts- und linksseitiger Grenzwert sind verschieden, daher kein Grenzwert.

Die Summe der Beträge aller existierenden Grenzwerte ist 0,75.

❺ Berechne (durch geschicktes Erweitern oder Kürzen) die Grenzwerte folgender Quotienten.

a) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(5+h)^2-6(5+h)+5}{h}$ b) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(\frac{1}{2+h}-\frac{1}{2})}{h}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

Lösung

zu a) $\frac{(5+h)^2-6(5+h)+5}{h}=\frac{h^2+10\mathrm{h}+25-30-6\mathrm{h}+5}{h}=h+4$, also $\lim\limits_{h\to 0} h+4\ =\ 4$

zu b) $\frac{(\frac{1}{2+h}-\frac{1}{2})}{h}=\frac{\frac{2-(2+h)}{(2+h)2}}{h}=\frac{-1}{(2+h)2}$, also $\lim\limits_{h\to 0}\frac{-1}{(2+h)2}\ =-\frac{1}{4}$

zu c) $\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)}=\frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)}=\frac{1}{(\sqrt{x+4}+2)}$, also

$$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\frac{1}{4}$$

Die Summe der Beträge aller gesuchten Grenzwerte ist 4.

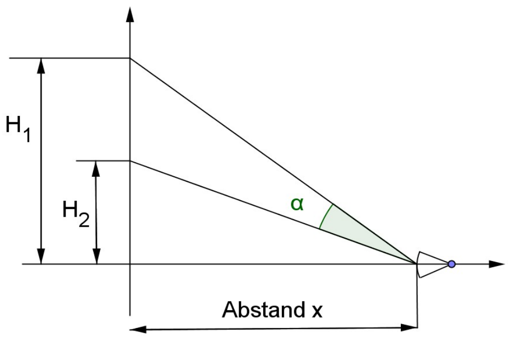
❻ In der Antike versuchte der griechische Philosoph Zenon (um 500 v.Chr.) mit folgendem „Paradoxon" zu belegen, dass ein Läufer, der 10 m/sec läuft, niemals eine Schildkröte einholen könne, die nur 1 m/sec läuft, der er aber 100 m Vorsprung gegeben hat. Die Begründung war die: Ist der Läufer 100 m gelaufen, ist die Schildkröte schon wieder 10 m weiter und hat er auch die aufgeholt, ist die Schildkröte wieder einen Meter weiter und so fort.
Wo ist der Denkfehler und nach welcher Strecke und welcher Zeit hat der Läufer die Schildkröte tatsächlich eingeholt?

<u>Lösung</u>

Der Läufer holt die Schildkröte nach $10+1+0{,}1+0{,}01+0{,}001+0{,}0001+...=11{,}\bar{1}\,sec$ bei $100+10+1+0{,}1+0{,}01+...=111{,}\bar{1}\,m$ ein. Der Denkfehler ist, dass eine unendliche Summe von Summanden immer unendlich groß werden müsse. Das ist nicht der Fall, wenn die Summanden entsprechend klein werden. In Bruchschreibweise handelt es sich um $11\frac{1}{9}\,sec$ und $111\frac{1}{9}\,m$

In Dezimalbruchschreibweise kommt bei Weg und Zeit nur die Ziffer 1 vor.

❼ Ein Betrachter sieht ein Standbild, das auf einem Podest der Höhe H_2 steht und das bis zum Scheitel die Höhe H_1 hat unter dem Öffnungswinkel α.
Stelle eine Funktion auf, die den Öffnungswinkel als Funktion des Abstandes darstellt und führe die Grenzwertbetrachtungen durch für $x\to 0$ und $x\to\infty$.



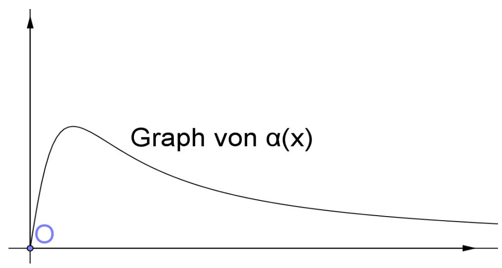
Die Summe der gesuchten Grenzwerte ist 0.

<u>Lösung</u>

Die Funktion ist

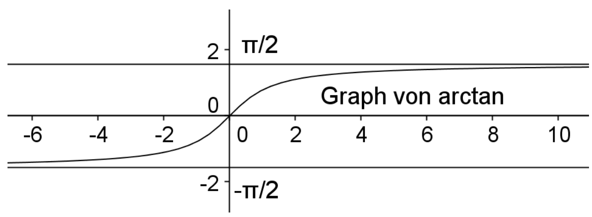
$$\alpha(x)=\arctan\left(\frac{H_1}{x}\right)-\arctan\left(\frac{H_2}{x}\right)$$

mit dem Graphen wie nebenstehend.



Da $\frac{H_i}{x}$ gegen $+\infty$ geht, wenn $x\to 0$ geht, ist für beide Summanden in $\alpha(x)$ der Grenzwert der arctan-Funktion $\frac{\pi}{2}$, d.h. $\lim\limits_{x\to 0}\alpha(x)=0$.

Wenn andererseits $x\to\infty$ geht, gehen die Quotienten $\frac{H_i}{x}$ gegen 0 und da $\arctan(0)=0$, folgt dann: $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x)=0$ also beide Male sind die Grenzwerte 0.
Übrigens dazwischen muss es einen best - möglichen Betrachtungswinkel geben.



Die Lösungszahlen in der Reihenfolge der Aufgaben sind:	2	8	7	0,75	4	1	0

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.

❽ <u>Expertenaufgabe (Regel von de L'Hospital)</u>

Wenn man den Grenzwert eines Quotienten zweier differenzierbarer Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ an einer Stelle x_0 ermitteln möchte, an der beide Funktionen den Wert 0 haben, so hat man zunächst Schwierigkeiten mit dessen Bestimmung. Folgende Umformung kann zielführend ein:

$$\lim_{h\to x_0}\frac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)} = \lim_{h\to x_0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{g(x_0+h)-g(x_0)} = \lim_{h\to x_0}\frac{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}{\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Wegen der Differenzierbarkeitsannahme existieren die Grenzwerte der Differenzenquotienten in Zähler und Nenner und wenn $g'(x)\neq 0$ sein sollte, ist der Grenzwert derselbe wie der gesuchte.

Bestimme folgende Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xe^x}{1-e^x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}$

<u>Lösung</u>

zu a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1} = 1$

zu b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xe^x}{1-e^x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+xe^x}{-e^x} = \lim\limits_{x\to 0}(-1-x) = -1$

zu c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$

zu d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{2\mathrm{x}}$ und nochmal $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{2} = \frac{1}{2}$