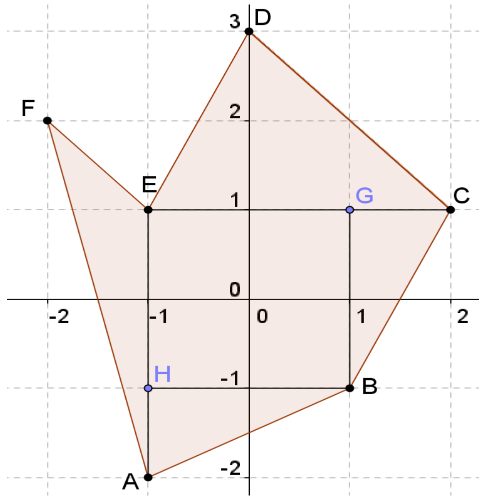
Thema	**n-Ecke**

❶ Wie groß ist der Flächeninhalt des nebenstehenden n-Ecks ?



Lösung

Die Figur lässt sich z.B. aus den folgenden Teilfiguren zusammensetzen:

1. Dreieck (ECD): $F_1=\frac{3\cdot 2}{2}=3$

2. Dreieck (AEF): $F_2=\frac{3\cdot 1}{2}=1{,}5$

3. Dreieck(GBC): $F_3=\frac{2\cdot 1}{2}=1$

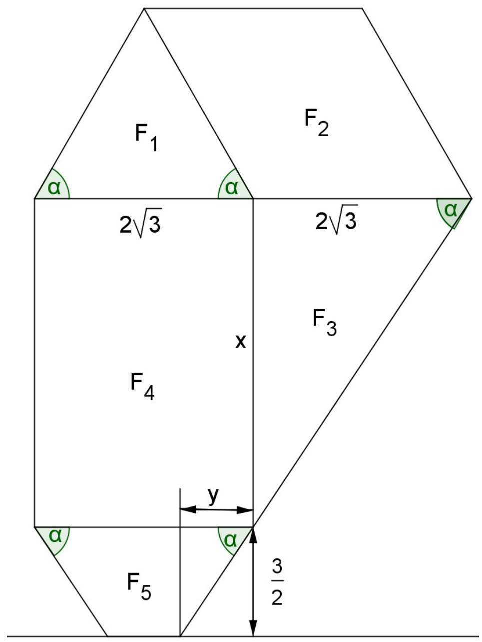
4. Dreieck((ABH): $F_4=\frac{2\cdot 1}{2}=1$

5. Viereck(HBGE): $F_5=2\cdot 2=4$

und $F_{gesamt}=F_1+F_2+F_3+F_4+F_5=10{,}5$, d.h. aufgerundet: 11 .

❷ Berechne den Flächeninhalt des nebenstehenden n-Ecks. Der Winkel α ist 60 °.

(Hinweis: $\sin(60°)=\frac{\sqrt{3}}{2}$)



Lösung

Die Fläche eines Dreiecks ist $\frac{Grundseite\cdot Höhe}{2}$

Da die Höhe in dem gleichseitigen Dreieck 3 ist, ergibt sich $F_1=3\sqrt{3}$.

Die Fläche eines Parallelogramms ist $Grundseite\cdot Höhe$, daher $F_2=6\sqrt{3}$.

Bei den kürzeren Seiten der 3.Fläche hat man

$$\frac{x}{2\sqrt{3}}=\tan(60°)=\frac{\sin(60°)}{\cos(60°)}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$$,also $x=6$

und damit $F_3=6\sqrt{3}$.

Mit dem Wert für x folgt $F_4=12\sqrt{3}$.

Die 5. Teilfläche ist ein Trapez. Sei a die längere und b die kürzere der beiden parallelen Seiten und h ihr Abstand, dann ist der Flächeninhalt $\frac{(a+b)}{2}h$. Weiterhin ist $\tan(60°)=\frac{3/2}{y}$, also $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$, hiermit $b=2\sqrt{3}-2\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

Diese Größen in die Trapezformel eingesetzt:

$$F_5=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{4} .$$

Alle Teilflächen ergeben insgesamt

$$F_{gesamt}=F_1+F_2+F_3+F_4+F_5=117\frac{\sqrt{3}}{4} .$$

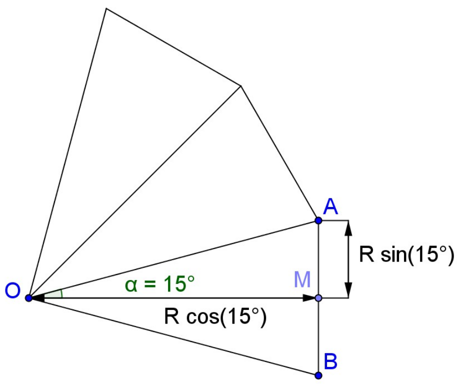
Die Lösungszahl ist daher 117.

❸ Leite eine Formel für den Flächeninhalt eines regulären 12-Ecks her, das einen Umkreis mit Radius R hat.

Hinweis: $\sin(15^o)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ und

$\cos(15^o)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Vergleiche mit dem Flächeninhalt eines Kreises mit Radius R.



Lösung

Das 12-Eck besteht aus 12 Dreiecken mit Grundseite $2R\sin(15°)$ und Höhe $R\cos(15°)$, also der Fläche $R^2\sin(15°)\cos(15°)$.

Nach obigem Hinweis und unter Nutzung der 3. binomischen Formel ist dies

$$A_{3\text{Eck}}=R^2\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{16}=R^2\frac{6-2}{16}=R^2\frac{1}{4} .$$

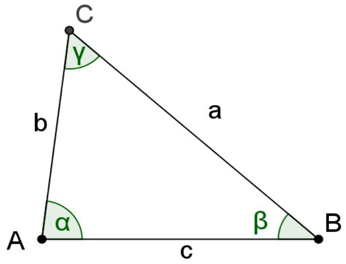
Im 12-Eck sind 12 dieser Dreiecke enthalten, d.h.

$$A_{12\text{Eck}}=12\cdot A_{3\text{Eck}}=12\cdot R^2\frac{1}{4}=3R^2 .$$

Die Fläche des Umkreises ist bekanntlich πR^2 , was wegen des Wertes von $\pi(\approx 3{,}14)$ ungefähr 4,7 % mehr ist, d.h. das 12-Eck ist ca. 5 % kleiner als die Kreisfläche.

❹ Gegeben ist ein Dreieck mit den Seiten
a= 6 cm, b= 4 cm und c= 5 cm.
Konstruiere daraus mit Zirkel und Lineal unter Beibehaltung der Seite c flächengleiche Dreiecke mit
a) $\alpha = 90^o$ b) $a = 5\,cm$

Die mit dem Lineal ausgemessene Fläche ist ganzzahlig gerundet 10 cm².



<u>*Lösung*</u>

Ich konstruiere zunächst den Fußpunkt der Höhe h_c auf der Grundseite c .
Dazu nehme ich einen beliebigen Radius in den Zirkel, der größer als der Abstand von C zur Grundlinie des Dreiecks ist und schlage um C einen Kreisbogen. Es entstehen die beiden Schnittpunkte A' und A'' mit der Grundlinie des Dreiecks. Dann nehme ich die Strecke $\overline{A'C}$ in den Zirkel, steche in A' bzw A'' ein und schlage jeweils einen Kreisbogen oberhalb bzw unterhalb der Grundlinie des Dreiecks. Die Schnittpunkte der Kreisbögen sind die Punkte C und ein Punkt C' unterhalb der Grundlinie. Die Strecke $\overline{CC'}$ schneidet die Grundlinie im Fußpunkt C_F (siehe Bild 1).

zu a)

Ich nehme nun die Seite c in den Zirkel, steche in C_F ein und schlage einen Kreisbogen, um die Grundlinie zu schneiden. Der Schnittpunkt ist ein neuer Punkt B' . Das Dreieck $C_F B' C$ hat dieselbe Höhe ($\overline{CC_F}$) und dieselbe Grundseite ($\overline{C_F B'}$) wie das Ausgangsdreieck, mithin dieselbe Fläche, aber $\alpha = 90°$ (siehe Bild 2).

zu b)

Ich nehme 5 cm in den Zirkel, steche in C ein und schlage einen Kreisbogen. Wo dieser die Grundlinie schneidet, ist der neue Punkt B'' . Um B'' schlage ich einen Kreisbogen mit 5 cm für c und erhalte A''' als Schnittpunkt mit der Grundlinie. Alle Bedingungen für ein flächengleiches Dreieck $A'''B''C$ sind erfüllt (siehe Bild 3).

Bild 1

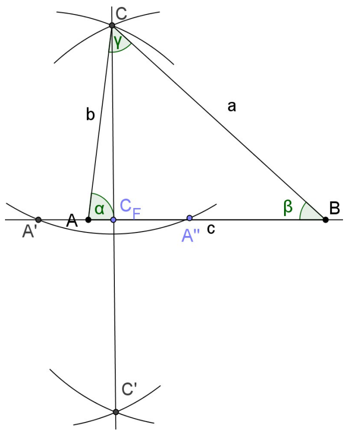


Bild 2

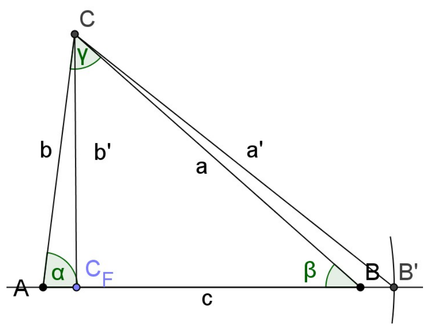
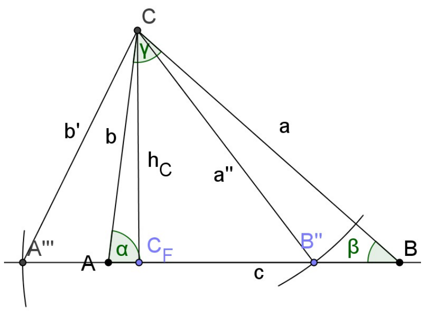
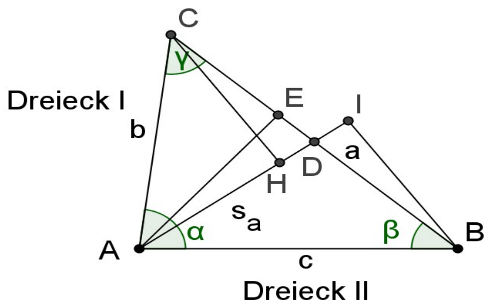


Bild 3



❺ Zeige, dass eine Seitenhalbierende ein Dreieck in zwei flächengleiche Hälften teilt.

Gleiche Grundseiten und zugehörige Höhen liegen 2 mal vor.



<u>Lösung</u>

Es gibt zwei Möglichkeiten, die Gleichheit der Dreiecke ADC und ABD einzusehen.

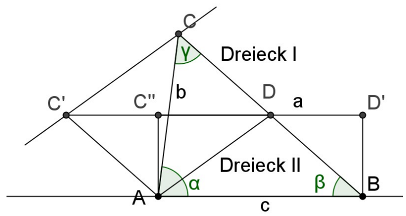
1. Nimm $\overline{CD}$ bzw. $\overline{BD}$ als Grundseite im jeweiligen Dreieck. Beide sind gleich lang, weil D die Seite a halbiert. Die Strecke $\overline{AE}$ ist die gemeinsame Höhe auf die jeweilige Grundseite, weil beiden der Punkt A gemeinsam ist.
2. Nimm die Seitenhalbierende s_a als jeweilige Grundseite beider Dreiecke. Die Strecken $\overline{CH}$ und $\overline{BI}$ sind die Höhen auf diese gemeinsame Grundseite und sie sind gleich lang, weil die Dreiecke HDC und DBI gleich sind. Dies wiederum ist der Fall, weil sie gleich lange Seiten $\overline{BD}$ und $\overline{DC}$ haben. Außerdem sind die Winkel DIB und CHD (beides rechte Winkel) und die Winkel DBI und HCD (Wechselwinkel) gleich.

❻ Konstruiere mit Zirkel und Lineal aus dem Dreieck in Aufg. 5 ein flächengleiches Rechteck unter Beibehaltung der Grundseite c.

Der mit dem Lineal gemessene Umfang des Rechtecks ist gerundet 14 cm.

<u>Lösung</u>

Konstruiere eine Parallele zu $\overline{AB}$ durch D, weiterhin eine Parallele zu $\overline{AD}$ durch C. Beide schneiden sich im Punkt C' (siehe Bild). Das Dreieck ADC' ist genauso groß wie das Dreieck ADC. Zusammen mit Dreieck ABD bildet es nun aber ein Parallelogramm, dessen Fläche so groß wie die Summe der Flächen beider Dreiecke ist. Wenn man noch die Seite $\overline{C'D}$ des Parallelogramms auf die gleich lange Seite $\overline{C''D'}$ schert, entsteht ein Rechteck mit gleicher Fläche wie zuvor die des Parallelogramms. Der Umfang ist dieses Rechtecks ist gerundet 14 cm.



Die Lösungszahlen in der Reihenfolge der Aufgaben sind:	11	117	5	10	2	14

Fit in Mathe

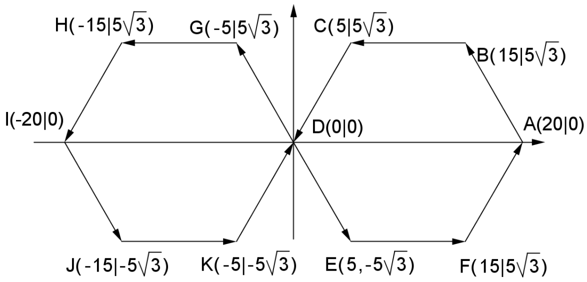
Musterlösung

März

Klassenstufe 9

❼ <u>Expertenaufgabe (Gaußsche Trapezformel)</u>

Wenn man die 12 Eckpunkte der nebenstehenden Doppelfigur gegen den Uhrzeigersinn umfährt, so dass der 13. Punkt wieder der Anfangspunkt ist, d.h. die Punkte in der Reihenfolge A-B-C-D-G-H-I-J-K-D-E-F-A durchnummeriert, liefert nach



Gauß die Formel $F=\frac{1}{2}(y_2x_1-y_1x_2)+(y_3x_2-y_2x_3)+...+(y_{13}x_{12}-y_{12}x_{13})$ den Flächeninhalt.

Stelle eine Tabelle mit 13 Zeilen auf, die pro Zeile die Größen enthält,

i	x_i	y_i	$y_{i+1}x_i-y_ix_{i+1}$

addiere dann die Werte der letzten Spalte und teile das Ergebnis durch 2!

Was passiert, wenn man den Richtungssinn beim Durchlaufen der Ecken ändert?

Was passiert, wenn der Richtungssinn in den Sechsecken unterschiedlich ist?

i	x_i	y_i	$y_{i+1}x_i-y_ix_{i+1}$
1	20	0	$100\sqrt{3}$
2	15	$5\sqrt{3}$	$50\sqrt{3}$
3	5	$5\sqrt{3}$	0
4	0	0	0
5	-5	$5\sqrt{3}$	$50\sqrt{3}$
6	-15	$5\sqrt{3}$	$100\sqrt{3}$
7	-20	0	$100\sqrt{3}$
8	-15	$-5\sqrt{3}$	$50\sqrt{3}$
9	-5	$-5\sqrt{3}$	0
10	0	0	0
11	5	$-5\sqrt{3}$	$50\sqrt{3}$
12	15	$-5\sqrt{3}$	$100\sqrt{3}$
13	20	0	
		$0{,}5\cdot\Sigma$	$300\sqrt{3}$

<u>Lösung</u>

Die Fläche eines regulären 6-Ecks mit Kantenlänge R ist $\frac{3\sqrt{3}}{2}R^2$ und da hier die Kantenlänge 10 ist, ergäbe sich für zwei 6-Ecke $2\frac{3\sqrt{3}}{2}100=300\sqrt{3}$.

Die Gaußsche Trapezformel liefert dasselbe Resultat (siehe unten).

Wenn man den Richtungssinn ändert, ergibt sich $-300\sqrt{3}$.

Wenn man die 6-Ecke in unterschiedlichem Richtungssinn durchläuft, liefert das eine eine positive und das andere bei demselbem Betrag eine negative Zahl, so dass insgesamt das Ergebnis 0 herauskommt.