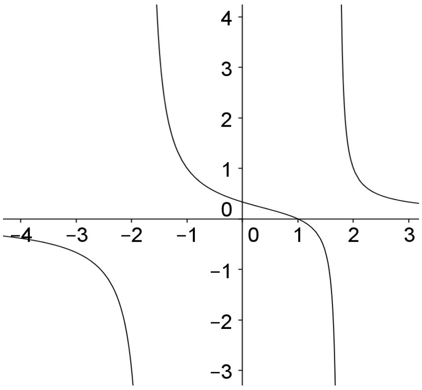
Fit in Mathe

Musterlösungen

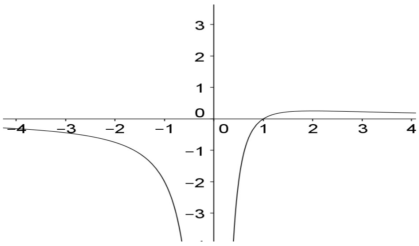
November Klassenstufe 10

Thema	**Gebrochen rationale Funktionen**

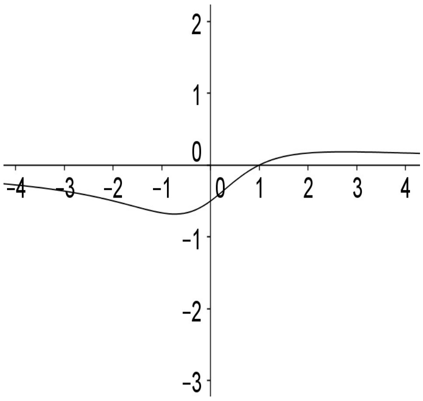
❶ a)



b)



c)



Die obigen Graphen gehören zur Funktionsschar $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+a}$ mit Werten $a\in\{-3,0,2\}$.
Bestimme, welcher Graph zu welcher Funktionsgleichung gehört.

Lösung
Die Werte von a in der Reihenfolge obiger Graphen sind
-3 , zu erkennen an den Polstellen bei $-\sqrt{3}$ und $+\sqrt{3}$
0, zu erkennen an der Polstelle bei 0 und
2, zu erkennen daran, dass es keine Polstellen gibt.

Die gesuchte drei-ziffrige Zahl ist 302, also Buchstabenpaar KO.

❷ Gegeben sind die drei ganzrationalen Funktionen:

(1) $q_1(x)=10x$

(2) $q_2(x)=x^2+6$

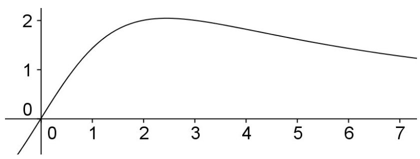
(3) $q_3(x)=x^2+3$

Die drei Graphen rechts sind daraus als gebrochen rationale Funktionen

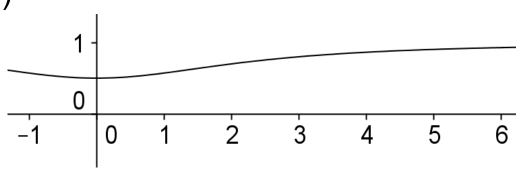
$f(x)=\dfrac{q_i(x)}{q_j(x)}$ mit $i,j\in\{1,2,3\}$

kombiniert.

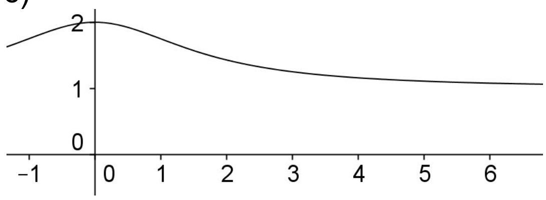
a)



b)



c)



Bilde aus den jeweils zusammengehörigen Indizes Brüche und addiere diese. In der Darstellung als echter Bruch findet man dann nach Kürzen im Zähler die Lösungszahl ..

<u>Lösung</u>

Keiner der Graphen hat eine Polstelle, also können nur die Funktionen $q_2(x)$ oder $q_3(x)$ im Nenner stehen.

Der erste Graph gehört wegen der Nullstelle bei $x=0$ zu einer Funktion, die $q_1(x)$ im Zähler hat. Bei $x=2$ liest man etwa den Wert 2 ab, das passt nur zu $\frac{q_1(2)}{q_2(2)}=2$, also haben wir im ersten Fall $\frac{q_1(x)}{q_2(x)}$.

Beim zweiten Graphen kann es sich aus obigen Gründen nur um einen Bruch der beiden letzten Funktionen handeln, und da der Wert für $x=0$ etwa 0,5 ist, passt das nur zu $\frac{q_3(0)}{q_2(0)}$, also haben wir in diesem Fall $\frac{q_3(x)}{q_2(x)}$.

Beim dritten Graphen kann nach gleicher Argumentation wir beim zweiten Graphen nur herauskommen $\frac{q_2(x)}{q_3(x)}$.

Nach der Anleitung zur Ermittlung der Lösungszahl ist dann der Bruch zu bilden:

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{2}{3}=\frac{3}{6}+\frac{9}{6}+\frac{4}{6}=\frac{16}{6}=\frac{8}{3} ,$$

also Lösungszahl 8, bzw. Buchstabenpaar AL oder KO

❸ Zeichne den Graphen der gebrochenen rationalen Funktion $f(x)=\frac{3x^3-x^2-12x+4}{x^2-4}$ über dem Intervall $[-4,4]$

<u>Lösung</u>

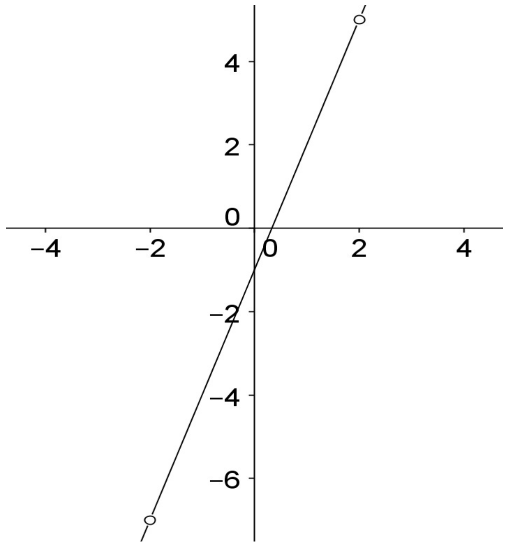
Zunächst muss man die Nullstellen des Nenners, das sind $x_1=-2$ und $x_2=2$, aus dem Definitionsbereich der Funktion ausnehmen.

Eine Überprüfung ergibt, dass dies aber auch Nullstellen des Zählers sind. In der Linearfaktordarstellung kann man deswegen den Zähler schreiben als $3\cdot(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x-x_3)$.

Wenn man dieses Produkt wieder ausmultipliziert, ergibt sich für das konstante Glied $3\cdot(-2)\cdot 2\cdot(-x_3)=12\cdot x_3$ und das muss nach Vergleich mit der Polynomdarstellung 4 sein, also $12\cdot x_3=4 \Leftrightarrow x_3=\frac{1}{3}$.

Man kann die Funktionsgleichung in der Linearfaktordarstellung von Zähler und Nenner also auch schreiben als: $f(x)=\dfrac{3\cdot(x+2)\cdot(x-2)\cdot(x-\frac{1}{3})}{(x-2)\cdot(x+2)}$ und nach Kürzen:

$f^*(x)=3x-1$. Die Funktion $f^*(x)$ stellt eine Gerade dar und stimmt an allen Stellen - außer bei $x=-2$ und $x=2$ - mit der Funktion $f(x)$ überein, denn hier ist $f(x)$ nicht definiert.



Die durchschnittliche Steigung des Graphen in diesem Intervall ist 3, also Buchstabenpaar SP.

❹ Eine gebrochen rationale Funktion, deren Grade in Zähler und Nenner möglichst klein sind, soll durch folgende Eigenschaften charakterisiert sein:

(1) im Unendlichen soll sich der Graph der Geraden $y=2x+1$ asymptotisch nähern

(2) bei $x=0$ soll eine Polstelle liegen.

(3) es soll nur genau eine Nullstelle geben.

Bestimme die Funktionsgleichung in der Form $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$, wobei $p(x)$ und $q(x)$ ganzrationale Funktionen sind, die keine gemeinsamen Teiler mehr haben.

<u>Lösung</u>
Die geforderte Teilerfremdheit macht nur Sinn, wenn es sich bei den Koeffizienten der Polynome in Zähler und Nenner um ganze Zahlen handelt.
Damit die Nennerfunktion eine Polstelle bei $x=0$ hat, muss der Nenner bei kleinstmöglichem Grad die Gestalt $q(x)=d\cdot x$ mit einem noch zu bestimmenden d haben.
Der Zähler muss mindestens um einen Grad größer sein, damit sich die Funktion im

Unendlichen asymptotisch einer Gerade mit einer Steigung nähert, die ungleich 0 ist. Wir können also allgemein einen Ansatz machen:

$f(x)=\frac{a x^2+b x+c}{d x}$ oder $f(x)=\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}+\frac{c}{d x}$. Wegen des geforderten Unendlichkeitsverhaltens ist: $\frac{a}{d}=2 \Leftrightarrow a=2d$ und $\frac{b}{d}=1 \Leftrightarrow b=d$.

Es ergibt sich also der Ansatz: $f(x)=\frac{2d x^2+d x+c}{d x}$.

Nun lautet eine weitere Forderung, dass es genau eine Nullstelle gibt. Diese kann nur von der Zählerfunktion geliefert werden und wir müssen setzen:

$2d x^2+d x+c=0$ oder $x^2+\frac{1}{2}x+\frac{c}{2d}=0$.

Die pq-Formel liefert hier die Lösungen: $x_{1/2}=-\frac{1}{4}\pm\sqrt{(\frac{1}{4})^2-\frac{c}{2d}}$. Damit es wie gefordert genau eine Nullstelle gibt, muss der Term unter dem Wurzelzeichen 0 sein, d.h. $\frac{1}{16}-\frac{c}{2d}=0 \Leftrightarrow \frac{c}{d}=\frac{1}{8}$ oder $c=\frac{d}{8}$.

Setzen wir das oben für c ein, ergibt sich schließlich:

$f(x)=\frac{2d x^2+d x+\frac{d}{8}}{d x}$ bzw. nach Kürzen von d und weil die Koeffizienten ganzzahlig sein müssen: $f(x)=\frac{16x^2+8x+1}{8x}$

Der Koeffizient der höchsten x-Potenz im Nenner ist 8, also Buchstabenpaar AL oder KO.

❺ Um eine bestimmte Produktmenge zu erzeugen, kann man als Produktionsfaktoren entweder Maschinen- (x) oder Arbeitsstunden (y) - die unterschiedlich teuer sind - einsetzen. Eine Untersuchung in einem speziellen Fall zeigt, dass folgende Kombinationen möglich sind:

x	3	4	6
y	9	7	6

Um den Zusammenhang beider Größen mathematisch darzustellen, macht man den Ansatz („Isoquante“ genannt) $y=\frac{a}{x-b}+c$.

Bestimme die Unbekannten a,b und c.

Lösung:

Setzt man die Wertepaare obiger Tabelle in die Funktion ein, ergeben sich die Gleichungen:

(i) $9=\frac{a}{3-b}+c \Leftrightarrow 27-9b=a+3c-cb$

(ii) $7 = \frac{a}{4-b} + c \Leftrightarrow 28-7b = a+4c-cb$

(iii) $6 = \frac{a}{6-b} + c \Leftrightarrow 36-6b = a+6c-cb$

Daraus ergibt sich:

(i) – (ii): $-1-2b = -c \Leftrightarrow 1+2b = c$

(i) – (iii): $-9-3b = -3c \Leftrightarrow 3+b = c$

Durch Gleichsetzen ergibt sich daraus $1+2b = 3+b \Leftrightarrow b = 2$.

Rückwärts eingesetzt $c = 5$ und $a = 4$.

Die Summe der Zahlen a, b und c ist 11, also Buchstabenpaar ME.

Lösungen mit Kennsilben														
KA	KO	HL	SP	IC	SC	LE	AL	HL	IE	HE	ME	AG	ST	KO
320	302	7	3	16	1	10	8	4	9	12	11	6	203	8
Lösungswort: KOKOSPALME														

❻ Expertenaufgabe (Partialbruchzerlegung)

Die Funktion $f(x) = \frac{x^2+3}{x(x-2)(x^2+4x+5)}$ lässt sich in sogenannte Partialbrüche zerlegen: $f(x) = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+4x+5}$. Bestimme A_1, A_2, B und C !

Lösung

Erweitert man die Nenner in $f(x) = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+4x+5}$ so, dass man denselben Hauptnenner hat, so erhält man:

$$f(x) = \frac{A_1(x-2)(x^2+4x+5)}{x(x-2)(x^2+4x+5)} + \frac{A_2 x(x^2+4x+5)}{(x-2)x(x^2+4x+5)} + \frac{(Bx+C)x(x-2)}{(x^2+4x+5)(x-2)x}$$

$$= \frac{A_1(x^3+2x^2-3x-10) + A_2(x^3+4x^2+5x) + Bx^3 + Cx^2 - 2Bx^2 - 2Cx}{x(x-2)(x^2+4x+5)}$$

$$= \frac{x^3(A_1+A_2+B) + x^2(2A_1+4A_2+C-2B) + x(-3A_1+5A_2-2C) + (-10)A_1}{x(x-2)(x^2+4x+5)}$$

Damit dieser Ausdruck gleich der ersten Funktionsdarstellung ist, müssen alle Koeffizienten übereinstimmen, d.h.

(i) $A_1+A_2+B = 0$

(ii) $2A_1+4A_2-2B+C = 1$

(iii) $-3A_1+5A_2-2C = 0$

(iv) $(-10)A_1 = 3$

Es handelt sich also um ein lineares Gleichungssystem mit 4 Unbekannten.

Aus der letzten Gleichung folgt $A_1 = -0{,}3$ und nach Einsetzen in die drei ersten:

(i') $A_2 + B = 0{,}3$

(ii') $4A_2 - 2B + C = 1{,}6$

(iii') $5A_2 - 2C = -0{,}9$

Aus (i') kann man A_2 durch $0{,}3 - B$ in den beiden letzten Gleichungen ersetzen und erhält:

(ii'') $1{,}2 - 6B + C = 1{,}6 \Leftrightarrow 6B - C = -0{,}4$

(iii'') $1{,}5 - 5B - 2C = -0{,}9 \Leftrightarrow 5B + 2C = 2{,}4$

Und wenn wir schließlich das Doppelte von (ii'') zu (iii'') hinzuaddieren, folgt:

$17B = 1{,}6 \Leftrightarrow B = \frac{8}{85}$. Aus (i') erhält man daraus $A_2 = \frac{3}{10} - \frac{8}{85} = \frac{7}{34}$.

und damit aus (iii') $\frac{35}{34} - 2C = -\frac{9}{10} \Leftrightarrow 2C = \frac{35}{34} + \frac{9}{10} = \frac{164}{85} \Leftrightarrow C = \frac{82}{85}$.

Die Partialbruchzerlegung stellt sich also dar als:

$$f(x) = -\frac{3}{10x} + \frac{7}{34(x-2)} + \frac{8x+82}{85(x^2+4x+5)} \quad .$$