Fit in Mathe

Musterlösung 1

November Klassenstufe 11

Thema	**Logarithmengesetze**

❶ Schreibe als rationale Zahl

a) $\log_2(16) = 4$ b) $\log_2(1) = 0$ c) $\log_2(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}$ d) $\log_2(\frac{1}{4}) = -2$

e) $\log_3(\frac{1}{27}) = -3$ f) $\log_3(9\cdot\sqrt{3}) = 2{,}5$ g) $\log_3(\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{1}{2}$ h) $\log_3(\sqrt[4]{9}) = 0{,}5$

Die Summe aller Ergebnisse ergibt 2, also Buchstabenpaar BE.

❷ In den folgenden Aufgaben soll $lg(x) := \log_{10}(x)$ sein.
Berechne

a) $2\,lg(5)+lg(4) = 2$ b) $\frac{1}{2}lg(3)+lg(3^{1,5})-lg(9) = 0$

c) $2\,lg(100)-lg(0{,}01) = 6$ d) $lg(\sqrt[3]{5})+lg(20)+\frac{2}{3}lg(5) = 2$

Die Summe aller Ergebnisse ist 10, also Buchstabenpaar LA .

❸ Schreibe folgende Logarithmen als Linearkombination $p\,lg(2)+q\,lg(3)$ mit rationalen Zahlen p und q .

a) $lg(6) = 1\cdot lg(2)+1\cdot lg(3)$ b) $lg(24) = 3\cdot lg(2)+1\cdot lg(3)$

c) $lg(0{,}375) = -3\,lg(2)+1\cdot lg(3)$ d) $lg(\frac{1}{72}) = -3\cdot lg(2)-2\cdot lg(3)$

e) $lg(\sqrt[3]{144}) = \frac{4}{3}\cdot lg(2)+\frac{2}{3}\cdot lg(3)$

Die Summe aller Zahlen p und q ist 1, also Buchstabenpaar GE.

❹ Berechne für a>0:

a) $\log_a(a) = 1$ b) $\log_a(a^3) = 3$ c) $\log_a(\sqrt{a^3}) = \frac{3}{2}$

d) $\log_{\frac{1}{a}}(a^2) = -2$ e) $\log_{\frac{1}{a}}(\sqrt[3]{a^5}) = -\frac{5}{3}$

Die Summe aller Lösungen ist 11 Sechstel, also Buchstabenpaar RU.

❺ Bestimme x

a) $\log_2(x) = 3$ b) $\log_5(0{,}2) = x$ c) $\log_x(\sqrt{3}) = 0{,}25$ d) $\log_{27}(x) = \frac{2}{3}$

e) $lg(10^8) = x$ f) $\log_4(2x) = 3$ g) $\log_2(\log_2(x)) = 2$ h) $\log_x(\frac{1}{4}) = -0{,}5$

<u>Lösung</u>

zu a) 8 zu b) -1 zu c) 9 zu d) 9 zu e) 8 zu f) 32 zu g) 16 zu h) 16

Die Summe aller Lösungen ist 97, also Buchstabenpaar NG.

❻ Fasse soweit wie möglich zusammen

a) $\log_3(5) - \log_3(15) + \log_3(\frac{1}{9}) =$ b) $2 \cdot \log_b(ab) - \log_b(\sqrt{b^3}) + \log_b(\frac{1}{a^2}) =$

c) $\log_b(b^2-9) - \log_b(b+3) - \log_b(b-3) + \log_b(\sqrt{b}) = 0{,}5$

d) $(\log_2(u^2) - \log_2(u) + \log_2(\sqrt{u})) : \log_2(\sqrt[4]{u^3}) =$

e) $\log(a-b) + \log(\sqrt{a+b}) - \log(\frac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}) =$ (wenn $\log(a+b) = 2$ ist)

<u>Lösung</u>

zu a) $\log_3(5) - \log_3(15) + \log_3(\frac{1}{9}) = \log_3(\frac{5}{15} \cdot \frac{1}{9}) = \log_3(\frac{1}{27}) = -3$

zu b) $2 \cdot \log_b(ab) - \log_b(\sqrt{b^3}) + \log_b(\frac{1}{a^2}) = \log_b((a \cdot b)^2 \cdot \frac{1}{b^{3/2}} \cdot \frac{1}{a^2}) = \log_b(b^{1/2}) = 0{,}5$

zu c)

$$\log_b(b^2-9) - \log_b(b+3) - \log_b(b-3) + \log_b(\sqrt{b}) = \log_b(\frac{b^2-9}{b+3} \cdot \frac{1}{b-3} \cdot b^{1/2}) = \log_b(b^{1/2}) = 0{,}5$$

zu d) $(\log_2(u^2) - \log_2(u) + \log_2(\sqrt{u})) : \log_2(\sqrt[4]{u^3}) = \dfrac{\log_2(u^2 \cdot u^{-1} \cdot u^{1/2})}{\log_2(u^{3/4})} = \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{4}} = 2$

zu e) $\log(a-b) + \log(\sqrt{a+b}) - \log(\frac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}) =$

$\log(a-b) + 0{,}5\log(a+b) - (\log(a-b) - \log(a+b)) = 1{,}5 \cdot \log(a+b) = 3$

Die Summe aller Lösungen ist 3, also Buchstabenpaar SZ.

❼ Bestimme die Lösungsmengen

a) $lg(-3x-1)=1$ b) $lg(-3x-1)=lg(1)$ c) $lg(4x+24)=lg(4)+2lg(x)$

d) $2lg(x-1)-lg(5x-9)=0$ e) $lg(-2x+x^2)=lg(3)$

Lösung

zu a) Da der Logarithmus nur für positive Werte definiert ist, muss man einschränken $-3x-1>0 \Leftrightarrow x<-\frac{1}{3}$.

Unter dieser Voraussetzung kann man umformen:

$$lg(-3x-1)=1 \Leftrightarrow lg(-3x-1)=lg(10) \Leftrightarrow -3x-1=10 \Leftrightarrow x=-\frac{11}{3}$$

zu b) Es muss genau wie unter a) eingeschränkt werden, dann gilt:

$$lg(-3x-1)=lg(1) \Leftrightarrow -3x-1=1 \Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}$$

zu c) Da der Logarithmus nur für positive Werte definiert ist, muss eingeschränkt werden: $x>0$.

Dann gilt $lg(4)+2lg(x)=lg(4x^2)$ und deswegen:

$$lg(4x+24)=lg(4x^2) \Leftrightarrow 4x+24=4x^2 \Leftrightarrow 0=x^2-x-6 \Leftrightarrow x=3 .$$

zu d) Wie oben muss eingeschränkt werden:

$x-1>0 \Leftrightarrow x>1$ und $5x-9>0 \Leftrightarrow x>\frac{9}{5}$.

Unter dieser Voraussetzung hat man

$$2lg(x-1)-lg(5x-9)=0 \Leftrightarrow lg((x-1)^2)=lg(5x-9) \Leftrightarrow$$
$$x^2-2x+1=5x-9 \Leftrightarrow x^2-7x+10=0 \Leftrightarrow$$
$$x=5 \quad oder \quad x=2$$

Da beide x der Einschränkung genügen, gibt es hier zwei Lösungen.

zu e) $lg(-2x+x^2)=lg(3)$

Die Einschränkung ist: $-2x+x^2>0 \Leftrightarrow x\cdot(x-2)>0$. Das gilt, wenn entweder beide Faktoren positiv sind, was für $x>2$ der Fall ist oder wenn beide Faktoren negativ sind, was für $x<0$ der Fall ist. Unter dieser Voraussetzung kann man weiter umformen:

$lg(-2x+x^2)=lg(3) \Leftrightarrow -2x+x^2=3 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0$. Hierfür ergeben sich die Lösungen $x=3$ und $x=-1$. Diese erfüllen die obigen Bedingungen und sind deswegen auch Lösung der Ausgangsgleichung.

Die Summe aller gültigen Lösungen ist: $\frac{23}{3}$.

Die Summe aller Lösungen ist somit 23 Drittel, also Buchstabenpaar US.

❽ Bestimme die Lösungsmengen

a) $4-2^x = 4100-5\cdot 2^x$ b) $81\cdot 4^{x+3} = 256\cdot 3^{4x}$ c) $2^x = 32\cdot x$

Lösung

zu a) $4-2^x = 4100-5\cdot 2^x \Leftrightarrow 4\cdot 2^x = 4096 \Leftrightarrow 2^x = 1024 \Leftrightarrow x = 10$

zu b) $81\cdot 4^{x+3} = 256\cdot 3^{4x} \Leftrightarrow 81\cdot 4^3\cdot 4^x = 256\cdot (3^4)^x \Leftrightarrow 3^4\cdot 4^3\cdot 4^x = 4^4\cdot (3^4)^x \Leftrightarrow \frac{3^4}{4} = (\frac{3^4}{4})^x$,

also ist $x = 1$.

zu c) $2^x = 32\cdot x \Leftrightarrow \frac{2^x}{x} = 2^5$

Für diese Gleichung gibt es kein Lösungsverfahren. Der Term auf der linken Seite der Gleichung stellt eine monoton wachsende Funktion dar. Für $x = 1$ ist ihr Wert noch kleiner als 2^5 , aber schnell wachsend. Durch Probieren findet man schließlich als Lösung $x = 8$.

Die Summe aller x-Werte ist 19, also Buchstabenpaar TA.

❾ 10000 € sind jährlich mit 2% verzinst worden und haben sich nun fast verdoppelt. Wie lange musste der Sparer darauf warten?

Hinweis: $lg(2) \approx 0{,}30103$ und $lg(1{,}02) = 0{,}0086$

Lösung

Das Kapital hat sich über n Jahre gemäß der Formel $K_n = K_0\cdot 1{,}02^n$ entwickelt. Geht man von einer Verdopplung aus, muss man die Gleichung lösen:

$$2K_0 = K_0\cdot 1{,}02^n$$

Man sieht, dass sich K_0 auf beiden Seiten der Gleichung herauskürzt, also spielt für die Berechnung der Verdopplungsdauer der Startwert keine Rolle.

Zu lösen ist die Gleichung $2 = 1{,}02^n$. Das sind nach Logarithmieren

$\frac{\log(2)}{\log(1{,}02)} = n$ Jahre.

Das sind auf glatte Zahlen gerundet 35 Jahre gewesen, also Buchstabenpaar ND.

Lösungen mit Kennsilben

4	2	34	19	35	11	23	1	12	3	21	10	98	97
LI	BE	GR	TA	ND	RU	US	GE	OM	SZ	TZ	LA	NK	NG

Lösungswort: BELAGERUNGSZUSTAND

❿ <u>Expertenaufgabe</u>

Beweise, dass für alle $x > 0$ gilt: $\log_a(x) = \dfrac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$,

wenn $a, b > 0$ und beide $\neq 1$ sind.

Hinweis: Setze $y = \log_a(x)$

<u>Lösung</u>

Setze $y := \dfrac{\log_b(x)}{\log_b(a)} \Leftrightarrow y \cdot \log_b(a) = \log_b(x)$

Nach Logarithmengesetz gilt $y \cdot \log_b(a) = \log_b(a^y)$, also ist

(*) $\log_b(a^y) = \log_b(x)$.

Die Logarithmusfunktion $\log_b(z)$ ist aber eine <u>eineindeutige</u> Funktion, d.h. dass unterschiedlichen unabhängigen Variablen immer unterschiedliche abhängige Variable zugeordnet werden. Das ist logisch gleichbedeutend damit, dass aus der Gleichheit zweier Funktionswerte wie in (*) auf die Gleichheit der unabhängigen Variablen geschlossen werden kann, also gilt

(**) $a^y = x$.

Die Logarithmus- und die Exponenzialfunktion sind Umkehrfunktionen zueinander, d.h. für alle positiven x-Werte gilt $x = a^{\log_a(x)}$,

Dies kann man in die Gleichung (**) einsetzen und erhält

(***) $a^y = a^{\log_a(x)}$.

Wegen der Eineindeutigkeit auch der Exponenzialfunktion kann man hieraus schließen:

$y = \log_a(x)$ oder wegen der Definition von y: $\log_a(x) = \dfrac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$.

was bewiesen werden sollte.

(lateinisch: quod erat demonstrandum =was zu beweisen war)