Fit in Mathe

Musterlösungen 1

Oktober Klassenstufe 10

Thema	Quadratische Funktionen

❶ Fülle die Wertetabellen für die angegebenen Werte aus.

Lösung (in der Tabelle)

a)

$y = x^2+2x+1$	x	2	-1	1
	y	**9**	**0**	**4**

b)

$y = 2x^2-3$	x	0	2	-2
	y	**-3**	**5**	**5**

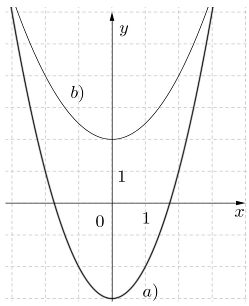
Die Summe der Ergebnisse und damit Lösungszahl ist 20, also Buchstabenpaar RE

❷ Bestimme die Funktionsgleichungen

Lösung (in die Kästchen eingetragen)

a) $y = x^2 - \boxed{3}$

b) $y = \boxed{\frac{1}{2}} \cdot x^2 + \boxed{2}$



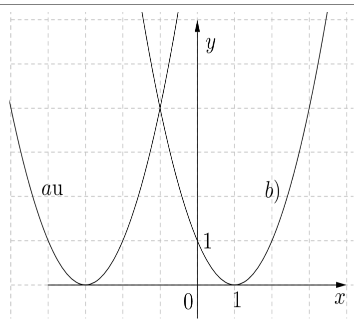
Die Summe der drei Zahlen in den Kästchen ist 5,5 , also Buchstabenpaar IS .

❸ Bestimme die Funktionsgleichungen

Lösung (in die Kästchen eingetragen)

a) $y = (x + \boxed{3})^2$

b) $y = (x - \boxed{1})^2$



Die Summe der Zahlen in den Kästchen ist 4 , also Buchstabenpaar ER.

Fit in Mathe

Musterlösungen

Oktober Klassenstufe 10

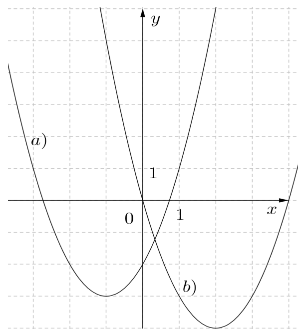
❹ Bestimme die Funktionsgleichungen in der Form

<u>Lösung (in die Kästchen eingetragen)</u>

a) $y = (x + \boxed{1})^2 - \boxed{3}$

b) $y = (x - \boxed{2})^2 - \boxed{4}$

Die Summe der Zahlen in den Kästchen ist 10 , also Buchstabenpaar EP.



❺ Schreibe die Funktionsgleichungen in der Form $y = (x + d_1)^2 + d_2$

<u>Lösung (in die Kästchen eingetragen)</u>

a) $y = x^2 - 8x + 16 \qquad y = (x - \boxed{4})^2 + \boxed{0}$

b) $y = x^2 + 4x + 4 + 1 \qquad y = (x + \boxed{2})^2 + \boxed{1}$

c) $y = x^2 - 2x + 2 \qquad y = (x - \boxed{1})^2 + \boxed{1}$

d) $y = x^2 + 0{,}6x + 0{,}08 \qquad y = (x + \boxed{0{,}3})^2 - \boxed{0{,}01}$

Die Summe aller Zahlen in den Kästchen ist 9,31 , also Buchstabenpaar OR.

❻ Bestimme die Nullstellen – wenn vorhanden – folgender Funktionen:

a) $y = x^2 - 8x + 16$ b) $y = x^2 - 25$ c) $y = 4x^2 - 64$ d) $y = 4x^2 + 100$

e) $y = x^2 + x - 2$ f) $y = x^2 + x - 3{,}75$

<u>Lösung</u>

zu a) $x_1 = 4$ zu b) $x_1 = 5 \; und \; x_2 = -5$ zu c) $x_1 = 4 \; und \; x_2 = -4$

zu d) $keine \; Nullstelle$ zu e) $x_1 = -2 \; und \; x_2 = 1$ zu f) $x_1 = \frac{3}{2} \; oder \; x_2 = -\frac{5}{2}$

Die Summe aller Nullstellen ist 2 , also Buchstabenpaar TA.

❼ Ein Schlagball, der die Hand des Werfers im Punkt $(0\,m / 1{,}5\,m)$ verlässt, beschreibt eine parabelförmige Kurve mit der Gleichung $y = -0{,}02x^2 + 0{,}97x + 1{,}5$.
Bestimme, wie weit der Ball geflogen ist, wenn er bei $y = 0$ wieder zu Boden fällt.
Wie hoch war der höchste Punkt seiner Flugkurve ?

<u>Lösung</u>

Die Nullstellen der Parabel sind zu finden, d.h. die Lösungen der Gleichung

$$0 = -0{,}02x^2 + 0{,}97x + 1{,}5 \;\Leftrightarrow\; 0 = x^2 - \frac{97}{2}x - 75 \quad .$$

Die pq-Formel liefert die beiden Lösungen:

$$x_{1/2}=\frac{97}{4}\pm\sqrt{\left(\frac{97}{4}\right)^2+75}=\frac{97}{4}\pm\frac{\sqrt{97^2+75\cdot 16}}{4}=\frac{97}{4}\pm\frac{103}{4}\ \Rightarrow\ x_1=50\ und\ \ x_2=-\frac{3}{2}\ .$$

Physikalisch sinnvoll ist nur der Wert $x_1=50$, also fliegt der Ball 50 m weit.
Da eine Parabel immer symmetrisch zum Scheitelpunkt ist, muss dieser bei dem x liegen, das genau zwischen den Nullstellen ist, also bei $x_s=(50-\frac{3}{2}):2=\frac{97}{4}$.

Die zugehörige Höhe ist

$$y_s=-0{,}02\cdot\left(\frac{97}{4}\right)^2+0{,}97\cdot\frac{97}{4}+1{,}5=-\frac{2}{100}\cdot\frac{97^2}{16}+\frac{97}{100}\cdot\frac{97}{4}+\frac{3}{2}=9409\cdot\left(-\frac{1}{800}+\frac{2}{800}\right)+\frac{3}{2}$$

$$=\frac{9409}{800}+\frac{1200}{800}=\frac{10609}{800}=13{,}26125\,m\approx 13\,m$$

Die Summe aus der Weite und der auf glatte m gerundeten Höhe ist 63, also Buchstabenpaar GE.

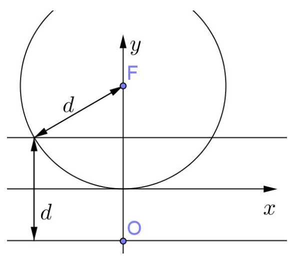
Lösungen mit Kennsilben

19	20	71	4	3	5,5	8,89	2	11	9,31	3	4,5	63	10
PA	RE	HT	ER	IO	IS	FR	TA	NS	OR	UC	SS	GE	EP

Lösungswort: REISEREPORTAGE

❽ Expertenaufgabe

Der Abstand d eines Punktes P (x/y) von einem anderen Punkt F (u/v) lässt sich bekanntlich mit dem Satz des Pythagoras als $d=\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}$ bestimmen.
Der Abstand eines Punktes von einer Geraden ist die Entfernung des Punktes zum Lotpunkt auf der Gerade (siehe Zeichnung).



a) Es seien eine Gerade gegeben durch $y=-1$ und ein Punkt F $(0/2)$.
Gib eine Gleichung an, der die Punkte (x/y) genügen, die von beiden denselben Abstand haben. Wie sieht die Menge geometrisch aus?

b) Die Gerade habe nun allgemein die Funktionsvorschrift $y=a$ und der Punkt die Koordinaten (u/v) mit $v\neq a$. Wie lautet die Gleichung, der die Koordinaten von (x/y) genügen müssen?

Lösung

zu a)

Ein Punkt P(x|y) habe von der Geraden $y=-1$ den Abstand $|y+1|$ und vom Punkt F den Abstand $d=\sqrt{x^2+(y-2)^2}$ und beide Abstände seien gleich, d.h.

$$|y+1|=\sqrt{x^2+(y-2)^2}\ \Rightarrow\ y^2+2y+1=x^2+y^2-4y+4\ \Leftrightarrow\ y=\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{2}$$

Die Koordinaten der Punkte müssen also die obige Parabelgleichung erfüllen, d.h.

der Graph der Parabel $y=\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{2}$ ist die Menge aller Punkte, die von der Geraden $y=-1$ und dem Punkt $F(0|2)$ denselben Abstand haben.

Zu b)
Nun führen wir obigen Nachweis allgemein.
Der Abstand zwischen Punkt und Gerade ist $|y-a|$,
der Abstand zum Punkt $d=\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}$.
Gleichsetzen ergibt:

$$|y-a|=\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2} \Rightarrow (y-a)^2 = x^2-2xu+u^2+y^2-2yv+v^2$$
$$\Leftrightarrow \quad y^2-2ya+a^2 = x^2-2xu+u^2+y^2-2yv+v^2$$
$$\Leftrightarrow \quad -2ya+a^2 = x^2-2xu+u^2-2yv+v^2$$
$$\Leftrightarrow \quad y2(v-a) = x^2-2xu+u^2+v^2-a^2$$
$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{2(v-a)}\cdot x^2 - \frac{u}{v-a}x + \frac{u^2+v^2-a^2}{2(v-a)}$$

Übrigens:
Bei der Parabel zu a) liegt bei $F^*(0|1)$ (d.h. genau zwischen F und dem Scheitel) der „Brennpunkt“ der Parabel. Parallel zur y-Achse von oben in die Parabel einfallende Strahlen werden alle so an der Innenwand der Parabel reflektiert (Einfallwinkel = Ausfallwinkel), dass sie durch den Brennpunkt gehen.
Das ist das Prinzip der Parabolantenne.