Fit in Mathe

Musterlösungen 1

Oktober Klassenstufe 11

Thema	Logarithmusfunktion

❶ Finde den Exponenten y, der die Gleichung $a^y = x$ löst. Nach der Definition der Logarithmusfunktion gilt $y = \log_a(x)$, d.h.

Lösung (eingetragen in die Tabelle)

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
a	10	2	3	10	3	19	2	2
x	100	16	243	0,01	$\sqrt{3}$	1	$4\sqrt{2}$	0,125
y	**2**	**4**	**5**	**-2**	**0,5**	**0**	**2,5**	**-3**

Die Summe aller Werte ergibt 9, also Buchstabenpaar AL.

❷ Wie in Aufgabe 1 ist die Funktion gegeben $y = \log_a(x)$

Lösung (eingetragen in die Tabelle)

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
a	2	10	5	3	16	256	10	16
y	3	-1	2	3	0,25	-0,25	2	-0,5
x	**8**	**0,1**	**25**	**27**	**2**	**0,25**	**100**	**0,25**

Die Summe aller Werte auf ganze Zahlen aufgerundet ergibt 163, also Buchstabenpaar TH.

❸ Fülle die Leerstellen mit ganzen Zahlen aus.

Lösung (in die Kästchen eingetragen)

a) $\log_{10}(1) = \boxed{0}$ b) $\log_{10}(100) = 1 + \boxed{1}$ c) $\log_{10}(200) = \log_{10}(\boxed{2}) + 2$

d) $\log_{10}(300) = \log_{10}(6) + 1 + \log_{10}(\boxed{5})$ e) $\log_{10}(400) = 2 \cdot (\log_{10}(\boxed{2}) + 1)$

f) $\log_{10}(500) = \boxed{3} - \log_{10}(2)$ g) $\log_{10}(600) = \log_{10}(3) + \boxed{3} - \log_{10}(5)$

Die Summe aller Zahlen in den Leerstellen ist 16, also Buchstabenpaar OC.

❹ Fülle die Wertetabelle aus und zeichne den Graphen der Funktion $f(x) = \log_{16}(x)$

Lösung (in die Tabelle eingetragen)

x	0,0625	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8	16
$\log_{16}(x)$	**-1**	**-0,75**	**-0.5**	**-0.25**	**0**	**0,25**	**0,5**	**0,75**	**1**

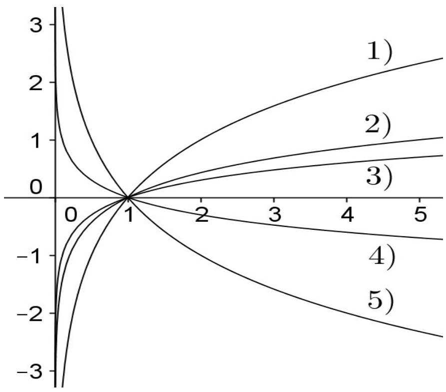
Die Summe aller Funktionswerte ist 0, also Buchstabenpaar HD.

❺ $\log_a(x)$ und $\log_b(x)$ mit $a, b > 0$ und $a \neq b$ sind für alle $x \in R$ proportional zueinander.
a) Welche Einschränkung an a und b muss noch gemacht werden, damit die Aussage stimmt ?
b) Finde die Proportionalitätskonstante c , so dass $\log_a(x) \cdot c = \log_b(x)$.

Lösung
zu a) Beide müssen ungleich 1 sein, weil $\log_1(x)$ keine Funktion ist, die für alle reellen Zahlen definiert ist.
zu b) Die Proportionalitätskonstante ist $\log_b(a)$, also für $a=2$ und $b=4$ ist $c = \log_4(2) = 0{,}5$, *also Buchstabenpaar EU.*

❻ Ordne die Graphen in der nebenstehenden Zeichnung den richtigen Funktionen zu (hier willkürliche Reihenfolge).

1) $f(x) = \log_{0,1}(x)$
2) $f(x) = \log_{10}(x)$
3) $f(x) = \log_5(x)$
4) $f(x) = \log_{0,5}(x)$
5) $f(x) = \log_2(x)$



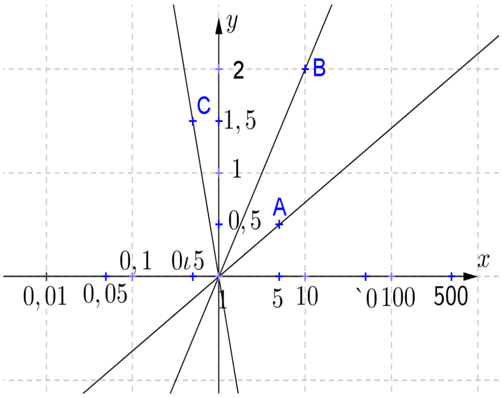
Lösung
Wenn die Basis < 1 ist, ist der Logarithmus einer Zahl, die >1 ist, negativ und zwar betraglich umso kleiner je kleiner die Basis ist, daher
Funktion 1 zu Graph 4, d.h. $1 \cdot 4 = 4$
Funktion 4 zu Graph 5, d.h. $4 \cdot 5 = 20$
Wenn die Basis >1 ist, ist der Logarithmus einer Zahl, die >1 ist, positiv und zwar betraglich umso größer je kleiner die Basis ist, daher
Funktion 2 zu Graph 3, d.h. $2 \cdot 3 = 6$
Funktion 3 zu Graph 2, d.h. $3 \cdot 2 = 6$
Funktion 5 zu Graph 1, d.h. $5 \cdot 1 = 5$

Die Summe aller Produkte ist 41, also Buchstabenpaar TS.

❼ Manchmal trägt man die Werte auf den Koordinatenachsen logarithmisch auf, wie hier auf der x-Achse.

Bestimme die Basis a der drei Logarithmusfunktionen $f(x) = \log_a(x)$, deren Graphen hier durch Geraden dargestellt werden.

Die Summe der drei jeweils auf ganze Zahlen aufgerundeten Basen ist ____.



<u>Lösung</u>

An den Punktkoordinaten der Punkte A bis C kann man die Basen ablesen.
Die x- und y-Koordinate beim Graphen

(i) durch A stehen in der Beziehung $\log_a(5)=0{,}5 \;\Leftrightarrow\; a^{0{,}5} = 5 \;\Leftrightarrow a = 25$,

(ii) durch B stehen in der Beziehung $\log_a(10)=2 \;\Leftrightarrow\; a^2 = 10 \;\Leftrightarrow a = \sqrt{10}$,
also $3<a<4$ und nach Aufrunden die Zahl 4.

(iii) durch C stehen in der Beziehung $\log_a(0{,}5)=1{,}5 \;\Leftrightarrow\; a^{1{,}5} = 0{,}5 \;\Leftrightarrow a = (\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$,

also $0<\frac{1}{\sqrt[3]{4}}<1$ und nach Aufrunden die Zahl 1

Die Summe der Lösungszahlen ist 30, also Buchstabenpaar CH.

Lösungen mit Kennsilben													
0,75 AT	16 OC	170 RB	0,5 EU	8 SE	9 AL	39 TS	17 OK	28 CH	163 TH	1 RO	41 TS	0 HD	30 CH

Lösungswort: ALTHOCHDEUTSCH

❽ <u>Expertenaufgabe</u>

Die Eulersche Zahl $e\ (=2{,}71828..)$ ist folgender Grenzwert $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x$ und für jedes $a\in R$ gilt: $e^a = \lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{a}{x})^x$.

$\ln(x)$ sei die Umkehrfunktion von e^x .

Zeige hiermit, dass für jedes positive $x\in R$ gilt: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h} = \frac{1}{x}$

Lösung

Wegen der Logarithmenregel $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$ ist:

$$\frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h} = \frac{1}{h}\cdot\ln(\frac{x+h}{x}) = \frac{1}{h}\cdot\ln(1+\frac{h}{x})$$

und wegen der Logarithmenregel $a\cdot\ln(b) = \ln(b^a)$ kann man weiter umformen:

$$\frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h} = \ln(1+\frac{h}{x})^{\frac{1}{h}} = \ln(1+\frac{1/x}{1/h})^{\frac{1}{h}}$$

Nun setze man $n := \frac{1}{h}$, dann wird daraus: $\frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h} = \ln(1+\frac{1/x}{n})^n$

Es ist $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h} = +\infty \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$, deswegen ist:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h} = \lim_{n\to+\infty}\ln(1+\frac{1/x}{n})^n \quad .$$

Da $\ln(x)$ eine stetige Funktion ist, kann man weiter schließen:

$\lim_{n\to+\infty}\ln(1+\frac{1/x}{n})^n = \ln(\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1/x}{n})^n)$ und der Limes im Argument von ln ist wie oben vorgegeben $e^{\frac{1}{x}}$. Wenn wir das einsetzen, ergibt sich schließlich:

$$\ln(\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1/x}{n})^n) = \ln(e^{\frac{1}{x}}) = \frac{1}{x}$$