Fit in Mathe

Musterlösungen 1

Oktober Klassenstufe 12

Thema **Integrationsregeln**

❶ Berechne die folgenden Integrale

a) $\int_0^3 1\,dx$ b) $\int_0^3 x\,dx$ c) $\int_0^3 x^2\,dx$ d) $\int_0^3 x^3\,dx$

<u>Lösung</u>

zu a) 3 zu b) 4,5 zu c) 9 zu d) 20,25

Die Summe aller Werte ganzzahlig gerundet ist 37, also Buchstabenpaar KL.

❷ Berechne unter Nutzung der Ergebnisse aus Aufgabe 1 die folgenden Integrale

a) $\int_0^3 (x^3+x^2+1)\,dx$ b) $\int_0^3 (x^3-x^2)\,dx$ c) $\int_0^3 (x^3-4x^2+5x-2)\,dx$ d) $\int_0^3 \frac{x^2-1}{x+1}\,dx$

<u>Lösung</u>

zu a) $20{,}25+9+3=32{,}25$

zu b) $20{,}25-9=11{,}25$

zu c) $20{,}25-4\cdot 9+5\cdot 4{,}5-2\cdot 3=20{,}25-36+22{,}5-6=0{,}75$

zu d) $\int_0^3 \frac{x^2-1}{x+1}\,dx = \int_0^3 x-1\,dx = 4{,}5-3 = 1{,}5$

Die Summe aller Werte ganzzahlig gerundet ist 46, also Buchstabenpaar AV.

❸ Bestimme die Stammfunktion mit additiver Konstante 0 zu

a) $f(x)=3\cdot x^{-\frac{1}{2}}$ b) $f(x)=2\cdot e^{0{,}5x}$ c) $f(x)=\cos(\frac{x}{2})$ d) $f(x)=\frac{2}{2x+1}$

<u>Lösung</u>

zu a) $F(x)=6x^{\frac{1}{2}}$ zu b) $F(x)=4\cdot e^{0{,}5x}$ zu c) $F(x)=2\cdot\sin(\frac{x}{2})$

zu d) $F(x)=1\cdot\ln(x+\frac{1}{2})$

Die Summe der konstanten Faktoren ist 13, also das Buchstabenpaar IE.

Fit in Mathe

Musterlösungen

Oktober

Klassenstufe 12

❹ Bestimme mit Hilfe der Produktregel $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$ jeweils die Stammfunktion mit additiver Konstante 0.

a) $f(x) = 2x\sin(x)+x^2\cos(x)$ b) $f(x) = (1+x)\cdot e^x$ c) $f(x) = 1+\ln(x)$

Lösung

zu a) Setze $f(x)=x^2$ und $g(x) = \sin(x)$, dann ist die Integrandenfunktion $(f(x)\cdot g(x))'$, also die Stammfunktion $F(x) = f(x)\cdot g(x)=x^2\sin(x)$.

zu b) Setze $f(x)=x$ und $g(x)=e^x$, dann ist die Integrandenfunktion $(f(x)\cdot g(x))'$, also die Stammfunktion $F(x) = f(x)\cdot g(x)=x\cdot e^x$.

Zu c) Setze $f(x)=x$ und $g(x)=\ln(x)$, dann ist die Integrandenfunktion $(f(x)\cdot g(x))'=x\cdot\frac{1}{x}+\ln(x) = x\cdot(\ln(x))'+(x)'\cdot\ln(x)$, also die Stammfunktion $F(x) = f(x)\cdot g(x)=x\cdot\ln(x)$.

x taucht über alle Lösungsfunktionen summiert 4 mal als Faktor auf, also Buchstabenpaar RK.

❺ Man kann die Produktregel in Aufgabe 4 auch so anwenden.

$$\int f'(x)\cdot g(x)\,dx = \int (f(x)\cdot g(x))'\,dx-\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x)-\int f(x)\cdot g'(x)\,dx$$

Manchmal ist das letzte Integral einfacher zu lösen. Das Verfahren heißt die „partielle Integration“. Finde so die Stammfunktion mit additiver Konstante 0 zu

a) $f(x) = x\cdot\sin(x)$ b) $f(x) = x\cdot e^x$ c) $f(x) = (x+1)\cdot\ln(x+1)$ d) $f(x)=\ln(x+1)$

Lösung

zu a) $F(x) = \sin(x)-x\cos(x)$ *zu b)* $F(x) = x\cdot e^x-e^x$

zu c) $F(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2\cdot\ln(x+1)-\int\frac{1}{2}(x+1)^2\cdot\frac{1}{x+1}\,dx = \frac{1}{2}(x+1)^2(\ln(x+1)-\frac{1}{2})$

zu d) $F(x) = (x+1)\ln(x+1)-\int(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}\,dx = (x+1)\ln(x+1)-x$

Die Summe der Beträge F(0) von allen gesuchten Stammfunktionen ist

$0+|-1|+|-\frac{1}{4}|+0 = 1{,}25$ *also Buchstabenpaar ON .*

❻ Die Regel „Integrieren durch Substitution“ resultiert aus der Kettenregel der Differentiation $(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$. Anstatt den Summationsgrenzwert-prozess über $(f'(g(x))\cdot g'(x))\cdot\Delta x$ zu führen, klammert man $f'(g(x))\cdot(g'(x)\cdot\Delta x)$, nutzt $\Delta g(x) = g'(x)\cdot\Delta x$ und führt den Grenzwertprozess über $f'(g)\Delta g$ auf dem Intervall $(g(a);g(b))$ aus. Finde so die Stammfunktion von

a) $\ln(10)\cdot\int_0^1 x\cdot 10^{-x^2}\,dx$ b) $\frac{1}{\ln(2)}\cdot\int_0^1\frac{2x}{x^2+1}\,dx$ c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(x)\cos(x)\,dx$

<u>Lösung</u>

zu a) $\ln(10)\cdot\int_0^1 x\cdot 10^{-x^2}\,dx = \ln(10)\cdot\int_0^1 x\cdot e^{-\ln(10)\cdot x^2}\,dx$. Setze $g(x)=-\ln(10)\cdot x^2$.

Dann ist $g(0)=0$, $g(1)=-\ln(10)$ und $g'(x)=-2\ln(10)\cdot x$,

also $\ln(10)\cdot\int_0^1 x\cdot e^{-\ln(10)\cdot x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{-\ln(10)} e^g(-dg) = \frac{1}{2}\cdot\int_{-\ln(10)}^0 e^g\,dg = \frac{1}{2}\cdot(1-\frac{1}{10}) = \frac{9}{20}$

zu b) Setze $g(x)=x^2+1$. Dann ist $g(0)=1$, $g(1)=2$ und $g'(x)=2x$, also

$$\frac{1}{\ln(2)}\cdot\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{\ln(2)}\cdot\int_1^2 \frac{1}{g}\,dg = \frac{1}{\ln(2)}\cdot(\ln(2)-\ln(1)) = 1$$

zu c) Setze $g(x)=\sin(x)$. Dann ist $g(0)=0$, $g(\frac{\pi}{2})=1$ und $g'(x)=\cos(x)$,

also $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(x)\,dx = \int_0^1 g^2\,dg = \frac{1}{3}(1-0)=\frac{1}{3}$

Die Summe aller Werte ganzzahlig gerundet ist $\frac{9}{20}+1+\frac{1}{3}\approx 2$ *, also Buchstabenpaar ZE.*

❼ In der Wirtschaftsmathematik stellt man mit einer Nachfragefunktion dar, wieviel Mengeneinheiten x eines Gutes bei einem Preis pro Stück von

$p_N(x)$ $[\frac{Geldeinheiten}{Stück}]$ nachgefragt werden.

Die Nachfragekurve soll die Form haben: $p_N(x)=100\cdot e^{-x}$, d.h. die Nachfrage setzt bei 100 $[\frac{Geldeinheiten}{Stück}]$ ein und wird bei fallendem Stückpreis entsprechend größer. Der Umsatz ist die Fläche unter der Kurve.

Bestimme den kleinsten Umsatz, der auch bei theoretisch unendlich wachsender Menge nicht überschritten wird.

<u>Lösung</u>

Es sei U der Umsatz, der bis zu einer Menge N erzielt wird, dann gilt

$U(N)=\int_0^N 100\cdot e^{-x}\,dx = 100\cdot(1-e^{-N})$. *Wenn man N gegen* ∞ *laufen lässt, ergibt sich im Grenzwert:* $U(\infty)=100$ *, also Lösungszahl 100 und Buchstabenpaar RT.*

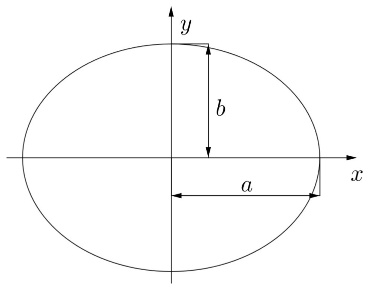
Lösungen mit Kennsilben													
38	100	5	1,25	3	46	51	37	4	200	10	2	1,75	13
OP	RT	OM	ON	NI	AV	ER	KL	RK	ST	NK	ZE	PO	IE

Lösungswort: KLAVIERKONZERT

❽ (Expertenaufgabe)

Ein Ellipsoid ist eine räumliche Figur, die durch die Rotation einer Ellipse um eine Hauptachse entsteht. Lege ein xy-Koordinatensystem so, dass seine y-Achse mit der Rotationsachse übereinstimmt. Ein Schnitt durch die y-Achse ergibt als Querschnittsfläche eine Ellipse, deren Peripheriepunkte die Gleichung erfüllen:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \quad .$$



Schneide dann den Ellipsoiden senkrecht zur y-Achse in Scheiben und führe einen Integrationsprozess über die Volumina der Scheiben durch.

Gib die Volumenformel für den Ellipsoiden an !

Lösung

Die y-Achse sei Rotationsachse der Ellipse. Dann liegt der so entstehende Ellipsoid zwischen $y=-b$ und $y=b$. Senkrecht zur Rotationsachse geschnitten ergeben sich jeweils kreisförmige Querschnittsflächen, für deren Flächen $q(y)$ man aus obiger Ellipsengleichung erhält:

$$q(y) = \pi \cdot x^2 = \pi \cdot a^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right)$$

Gehen wir nun davon aus, wir schneiden in beliebiger Weise in dünne Scheiben der Dicke Δy , so ist das Volumen einer Scheibe in der Höhe y annähernd:

$$\pi \cdot a^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right) \cdot \Delta y$$

Bei Summierung über alle diese Scheiben ergibt sich ein Gesamtvolumen $V_{Näh}$:

$$V_{Näh} = \pi \cdot a^2 \cdot \sum_{-b}^{b} \left(1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right) \cdot \Delta y$$

Das Integral ist nichts anderes als der Grenzwert dieser Summe, wenn man die Dicke der Scheiben gegen 0 gehen lässt, also

$$V = \pi \cdot a^2 \cdot \lim_{\Delta y \to 0} \sum_{-b}^{b} \left(1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right) \cdot \Delta y = \pi \cdot a^2 \cdot \int_{-b}^{b} \left(1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right) dy = \pi \cdot a^2 \cdot \frac{4}{3} b$$

(Für a=b ist dies die Volumenformel der Kugel.)