Thema	**Rechnen mit Maßeinheiten**

❶ Runde die folgenden Messergebnisse so, dass das gerundete Maß höchstens 1% davon abweicht.

0,002782 mm	39278 m	2,0009 km

Lösung

Ermittle ein 1%-Intervall um den angegebenen Wert durch Bestimmung der um (höchstens) 1% kleineren und (höchstens) 1 % größeren Werten, dann ist

$$0{,}0027542 < 0{,}002782 < 0{,}0028098$$

Runde $0{,}002782 \approx 0{,}00278 \approx 0{,}0028 \approx 0{,}003$.

Der vorletzte Wert liegt noch im Intervall, also ist die Lösung 0,002**8** mm.

$$38886 < 39278 < 39670$$

Runde $39278 \approx 39280 \approx 39300 \approx 39000 \approx 40000$

Der vorletzte Wert liegt noch im Intervall, also ist die Lösung 3900**0** m

$$1{,}9809 < 2{,}0009 < 2{,}0209$$

Runde $2{,}0009 \approx 2{,}001 \approx 2{,}00 = 2$

2,00 liegt im Intervall also ist die Lösung ohne die Nullen hinter dem Komma **2** km.

Die Summe der drei Endziffern ist 10, also Buchstabenpaar EI.

❷ Addiere und gib das Ergebnis in der Einheit des ersten Summanden an.

a) $5\ m + 300\ cm + 1000\ mm + 0{,}007\ km =$ b) $30\ mm^2 + 0{,}4\ cm^2 =$

c) $2\ Liter + 3\ dm^3 + 4000\ cm^3 + 0{,}005\ m^3 =$ d) $2\ kg + 4000\ g + 0{,}006\ t =$

e) $7\ \dfrac{kg}{Liter} + 1\ \dfrac{g}{cm^3} =$

Lösung

zu a) 5+3+1+7=16 zu b) 30+40=70 zu c) 2+3+4+5=14

zu d) 2+4+6=12 zu e) 7+1=8

Die Summe der 5 Ergebnisse ist 120, also Buchstabenpaar NH.

❸ Vervollständige die Maße des Rechtecks und gib das Ergebnis in einer natürlichen Zahl unter 100 an.

Lösung (siehe Tabelle)

Länge	Breite	Fläche
3 m	500 cm	**15 m²**
4000 mm	5.000.000 Mikrometer	**20 m²**
5 cm	0,04 m	20 cm²
3 mm	**5 km**	15 m²
5 nm	4 nm	$2\cdot10^{-17}$ m²

Die Summe der 5 berechneten Zahlen ist 50, also Buchstabenpaar EI.

❹ Vervollständige die Tabelle

Lösung (siehe Tabelle):

Dezimaldarstellung in m	Wissenschaftliche Schreibweise in m	Darstellung mit Präfix
50 000	$\mathbf{5 \cdot 10^{4}}$	50 km
30 000 000 000	$\mathbf{3 \cdot 10^{10}}$	30 Gm
0,005	$\mathbf{5 \cdot 10^{-3}}$	5 mm
0,000 000 007	$\mathbf{7 \cdot 10^{-9}}$	7 nm

Die Summe der nötigen Nullen in der Dezimaldarstellung und der Exponenten der wissenschaftlichen Schreibweise ist 28, also Buchstabenpaar TE.

❺ Für einen Würfel sollen die Kantenlängen und das Volumen bestimmt werden. Vervollständige die Tabelle.

Lösung (siehe Tabelle)

Kantenlänge in m	Messabweichung auf 1 % genau	Volumen in m^3	Abweichung beim Volumen auf 1 % genau
2	1 %	**8**	**3 %**
3	**2 %**	27	6 %

Die Summe der vier berechneten Zahlen ist 16, also Buchstabenpaar NS.

❻ Angelikas Größe wurde fünfmal gemessen. Bestimme den Mittelwert und die maximale Messabweichung in Zentimetern auf einen Zentimeter.

1) 1,70 m 2) 1,67 cm 3) 164 cm 4) 1,71 m 5) 1,63 m

Lösung

Mittelwert = Summe : Anzahl = 835 : 5 = **167** cm.
Die maximale Abweichung sind **4** cm.

Die Summe der beiden berechneten Zahlen ist 171, also Buchstabenpaar YS.

❼ Berechne zu den fünf Messwerten der vorigen Aufgabe die sogenannte „empiri-sche Standardabweichung" in Zentimetern auf einen Zentimeter genau.
Hinweis: Berechne die fünf Differenzen zum Mittelwert, quadriere diese, bilde den Mittelwert dieser 5 Quadrate und ziehe daraus die Wurzel.

Lösung

Es ist zu rechnen $\sqrt{\frac{3^2+0+3^2+4^2+4^2}{5}} \approx 3$.

Die empirische Standardabweichung ist 3, also Buchstabenpaar TE.

❽ Berechne den Mittelwert der fünf Differenzen aus der vorigen Aufgabe.

Lösung

Es ist zu rechnen

$$(170-167)+(167-167)+(164-167)+(171-167)+(163-167)=3+0-3+4-4=0$$

Das Ergebnis ist 0, also Buchstabenpaar ME.

Lösungen mit Kennsilben											
60 ER	171 YS	16 NS	8 IN	10 EI	180 RE	120 NH	0 ME	28 TE	2 IE	50 EI	3 TE
Lösungswort: EINHEITENSYSTEME											

❾ (Expertenaufgabe)

Berechne den Mittelwert der Quadrate der Werte von Aufgabe 6, subtrahiere davon das Quadrat des Mittelwerts aus Aufgabe 6 und ziehe aus diesem Ergebnis die Wurzel.

Vergleiche das Ergebnis mit der empirischen Standardabweichung aus Aufgabe 7. Wenn Du richtig gerechnet hast, wirst Du feststellen, dass die Werte gleich sind. Weise nach, dass diese Gleichheit für beliebige Messreihen gilt.

Lösung

Es ist zu rechnen:

$$\frac{170^2+167^2+164^2+171^2+163^2}{5}=\frac{28900+27889+26896+29241+26569}{5}=27899$$

Das Quadrat des Mittelwertes ist: 27889 , die Differenz beider Werte ist 10, und $\sqrt{10}\approx 3$ ist die empirische Standardabweichung aus Aufgabe 7.

Nehmen wir allgemein an, wir hätten eine Messreihe: $x_1, x_2, \dots, x_n$. Der Mittelwert sei μ und die Abweichungen vom Mittelwert $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$.

Dann kann man jeden Wert x_i schreiben als

(i) $x_i=\mu+\Delta x_i$.

Aus folgenden Gleichungen

$$\mu=\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}=\frac{(\mu+\Delta x_1)+(\mu+\Delta x_2)+\dots+(\mu+\Delta x_n)}{n}$$

$$=\frac{\mu\cdot n+(\Delta x_1+\Delta x_2+\dots+\Delta x_n)}{n}$$

$$=\mu+\frac{\Delta x_1+\Delta x_2+\dots+\Delta x_n}{n}$$

folgt, dass generell

(ii) $\frac{\Delta x_1+\Delta x_2+\dots+\Delta x_n}{n}=0$ (siehe Aufgabe 8).

Durch Nutzung der Gleichung (i) und dieses Resultates ergibt sich folgende Gleichungskette

$$\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}=\frac{(\mu+\Delta x_1)^2+(\mu+\Delta x_2)^2+\ldots+(\mu+\Delta x_n)^2}{n}$$

$$=\frac{(\mu^2+2\,\mu\,\Delta x_1+(\Delta x_1)^2)+(\mu^2+2\,\mu\,\Delta x_2+(\Delta x_2)^2)+\ldots+(\mu^2+2\,\mu\,\Delta x_n+(\Delta x_n)^2)}{n}$$

$$=\frac{n\cdot\mu^2+2\,\mu(\Delta x_1+\Delta x_2+\ldots+\Delta x_n)+((\Delta x_1)^2+(\Delta x_2)^2+\ldots+(\Delta x_n)^2)}{n}=$$

Letzteres ist wegen (ii):

$$=\mu^2+\frac{(\Delta x_1)^2+(\Delta x_2)^2+\ldots+(\Delta x_n)^2}{n}$$

Und wenn wir nun μ^2 subtrahieren und beidseitig die Wurzel ziehen, haben wir:

$$\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}-\mu^2}=\sqrt{\frac{(\Delta x_1)^2+(\Delta x_2)^2+\ldots+(\Delta x_n)^2}{n}}\quad ,$$

d.h. die behauptete Gleichung für die empirische Standardabweichung.