



# Fit in Mathe

Musterlösung

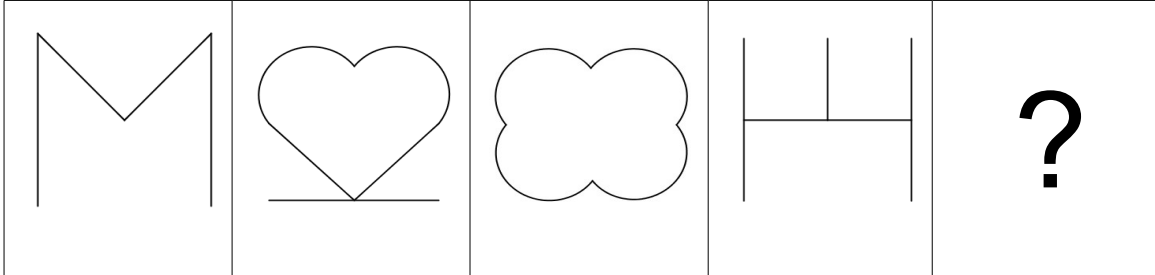
September

Klassenstufe 10

Thema

## Kongruenzabbildungen

1 Wie sieht das nächste Bild aus ?



Lösung

Die Lösungszahl ist natürlich 5, denn die rechte Hälfte obiger symmetrischer Figuren sind die Zahlen von 1 bis 4, danach folgt 5, also das Buchstabenpaar SC.

2 Bilde den Punkt  $P(2/3)$  mit folgenden Kongruenzabbildungen ab

- 1) Geradenspiegelung an der x-Achse,
- 2) Geradenspiegelung an der y-Achse,
- 3) Geradenspiegelung an der Geraden  $y = x$ ,
- 4) Punktspiegelung am Ursprung des Koordinatensystems  $O(0/0)$ ,
- 5) Drehung gegen den Uhrzeigersinn um  $90^\circ$  um den Ursprung  $O(0/0)$ .
- 6) Verschiebung um 3 Einheiten in x-Richtung und 2 in y-Richtung.

Bestimme jeweils die Koordinaten des Bildpunktes.

Lösung

zu 1)  $P'(2|-3)$

zu 2)  $P'(-2|3)$

zu 3)  $P'(3|2)$

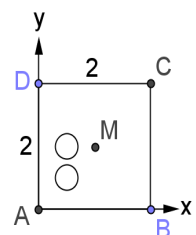
zu 4)  $P'(-2|-3)$

zu 5)  $P'(-3|2)$

zu 6)  $P'(5|5)$

Die Summe der y-Koordinaten ist 6, also das Buchstabenpaar HL.

- 3 Die nebenstehende Figur soll -falls möglich- durch eine einzige Geradenspiegelung (Geradengleichung angeben) oder Drehung (Winkel angeben) in das unten stehende Bild an derselben Stelle im Koordinatensystem überführt werden.  
Ermittle eine Lösung.



Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.



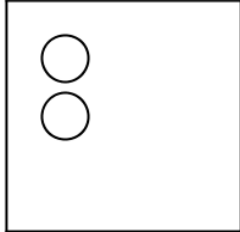
# Fit in Mathe

Musterlösung

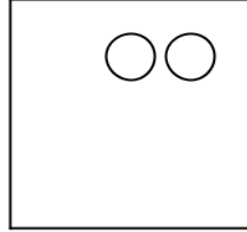
September

Klassenstufe 10

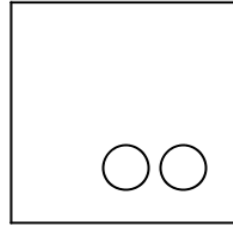
1)



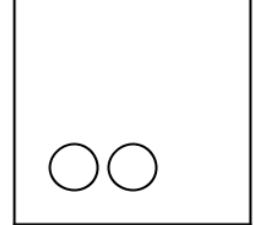
2)



3)



4)



## Lösung

Zu 1) Spiegelung an der Geraden  $y = 1$

zu 2) Spiegelung an der Geraden  $y = -x + 2$

zu 3) Drehung um  $90^\circ$  gegen den Uhrzeigersinn um den Punkt  $M(1/1)$

Es gibt hier keine Gerade, an der man spiegeln könnte, was man so einsehen kann: Geradenspiegelung ist nur möglich, wenn es für beide kleinen Kreise möglich ist, Verbindungsstrecken zu ihrem gespiegelten Gegenüber zu finden, die dieselbe Mittelsenkrechte haben, denn so muss die Spiegelachse beschaffen sein. In diesem Fall ist das nicht möglich.

Zu 4) Spiegelung an der Geraden  $y = x$

Geradenspiegelung ist in 3 Fällen möglich, also Buchstabenpaar AG.

**4** Bilde durch geometrische Überlegungen denselben Punkt wie in Aufgabe 2 durch folgende Kongruenzabbildungen ab:

a) Spiegelung an der Geraden  $y = x + 4$ ,

b) Punktspiegelung am Punkt  $S(2/-1)$ ,

c) Drehung im Uhrzeigersinn um  $O(0/0)$  um  $270^\circ$ .

Bestimme jeweils die Koordinaten des Bildpunktes.

## Lösung

zu a) Der Bildpunkt ist  $P'(-1/6)$

zu b) Der Bildpunkt ist  $P'(-2/1)$

zu c) Der Bildpunkt ist  $P'(-3/2)$

Die Summe aller  $y$ -Koordinaten ist 9, also Buchstabenpaar ZE.

**5** Gegeben sind eine Gerade  $y = -x - 5$  und ein Punkt  $S(-1/2)$ .  
Bestimme die Geradengleichung der Geraden, die am Punkt  $S$  gespiegelt ist.

## Lösung

Wenn wir einen beliebigen Punkt auf der Geraden herausgreifen  $P(x/y)$ , dann ist sein Abstand vom Punkt  $S$  unter Berücksichtigung des Vorzeichens in  $x$ -Richtung  $x - (-1)$  und in  $y$ -Richtung  $y - 2$ .

Beim Bildpunkt  $P'(x'/y')$  kehren sich die Vorzeichen um, so dass gilt  $x' - (-1) = -(x - (-1)) = -x - 1$  oder  $x' = -x - 2$  bzw.

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.



# Fit in Mathe

Musterlösung

September

Klassenstufe 10

$y' - 2 = -(y - 2)$  oder  $y' = -y + 4$ . Da aber  $y$  eine Funktion von  $x$  ist, kann man hier fortfahren  $y' = -(-x - 5) + 4 = x + 9$  und aus dem Zusammenhang zwischen  $x$  und  $x'$  folgt  $y' = -x' - 2 + 9 = -x' + 7$ .

Also ist der funktionale Zusammenhang zwischen den Koordinaten der gespiegelten Punkte:  $y' = -x' + 7$

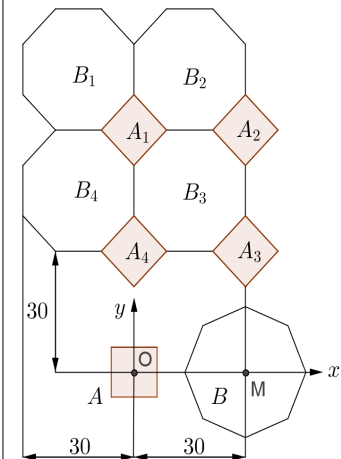
Die gespiegelte Gerade schneidet die  $y$ -Achse bei  $y = 7$ , also Buchstabenpaar UG.

- ⑥ Das bekannte Fliesenmuster  $(A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4)$  soll durch die definierten Kongruenzabbildungen aus den Ausgangsfiguren  $A$  und  $B$  erzeugt werden.

$D_{(\alpha, P)}$  = Drehung gegen den Uhrzeigersinn mit Winkel  $\alpha$  um den Punkt  $P$ .

$V_{(u, v)}$  = Verschiebung um  $u$  in  $x$ -Richtung und  $v$  in  $y$ -Richtung.

Gib die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  so an, dass man nach Drehungen  $A' = D_{(\alpha, O)}(A)$  bzw.  $B' = D_{(\beta, M)}(B)$  durch entsprechende Verschiebungen  $A_j = V_{(u_j, v_j)}(A')$  für  $(j=1, \dots, 4)$  und  $B_i = V_{(u_i, v_i)}(B')$  für  $(i=1, \dots, 4)$  erreicht.



## Lösung

Für die einzelnen Fliesen ergibt sich mit obigen Bezeichnungen

$$\begin{aligned} A_1 &= V_{(0,60)} \circ D_{(45, O)} & B_1 &= V_{(-45,75)} \circ D_{(22.5, M)} \\ A_2 &= V_{(30,60)} \circ D_{(45, O)} & B_2 &= V_{(-15,75)} \circ D_{(22.5, M)} \\ A_3 &= V_{(30,30)} \circ D_{(45, O)} & B_3 &= V_{(-15,45)} \circ D_{(22.5, M)} \\ A_4 &= V_{(0,30)} \circ D_{(45, O)} & B_4 &= V_{(-45,45)} \circ D_{(22.5, M)} \end{aligned}$$

Die Summe der Winkel und Verschiebungen ist 870, also das Buchstabenpaar ER.

## Lösungen mit Kennsilben

8	6	870	9	11	4	10	7	410	3	2	5
AE	HL	ER	ZE	NG	NN	MI	UG	ER	AG	ES	SC

Lösungswort: SCHLAGZEUGER

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.



# Fit in Mathe

Musterlösung

September

Klassenstufe 10

## 7 Expertenaufgabe

Gegeben ist der Punkt  $P(x/y)$ .

Durch Spiegelung an der Geraden  $y = mx + b$  ergibt sich der Bildpunkt  $P'(x'/y')$

Gib Formeln für  $x'$  und  $y'$  an.

(Tipp: Eine auf der angegebenen Geraden senkrecht stehende Gerade hat die

Steigung  $-\frac{1}{m}$  )

### Lösung

Um die Punkte auf der Geraden und den zu spiegelnden Punkt zu unterscheiden, nennen wir den Ursprungspunkt der Spiegelung  $P_0(x_0, y_0)$ .

Die Gerade durch diesen Punkt mit der Steigung  $m$  hat die Geradengleichung

$$y = m \cdot (x - x_0) + y_0 \text{ oder anders geschrieben } y = m \cdot x + y_0 - m \cdot x_0, \text{ d.h. diese}$$

Gerade schneidet die y-Achse bei  $y_0 - m \cdot x_0$ .

Um diesen Wert vom Schnittpunkt der Ausgangsgeraden mit der y-Achse bei  $b$  zu erreichen, muss  $y_0 - m \cdot x_0 - b$  zu  $b$  addiert werden. Die Gerade mit der Steigung

$m$ , die durch Subtraktion dieses Wertes von  $b$  definiert ist, liegt im gleichen Abstand auf der anderen Seite der Spiegelgerade und ist somit diejenige, auf der der Bildpunkt liegt, das ist die Gerade

$$(1) \quad y = m \cdot x + b - (y_0 - m \cdot x_0 - b) = m \cdot x + 2 \cdot b - y_0 + m \cdot x_0.$$

Andererseits liegt der Bildpunkt auf einer Geraden, die durch den Punkt  $P_0$  geht und senkrecht auf der Ausgangsgeraden steht, also die Gerade

$$(2) \quad y = -\frac{1}{m} \cdot (x - x_0) + y_0.$$

Da für den Bildpunkt die y-Koordinaten von (1) und (2) gleich sind, kann man setzen:

$$m \cdot x_0' + 2b - y_0 + m \cdot x_0 = -\frac{1}{m} \cdot (x_0' - x_0) + y_0 \text{ und die Lösung für } x \text{ dieser Gleichung}$$

ergibt sich durch die folgende Umformungen:

$$\left(m + \frac{1}{m}\right) x_0' = \frac{1}{m} \cdot x_0 + y_0 + y_0 - m \cdot x_0 - 2 \cdot b \Leftrightarrow$$

$$\left(m + \frac{1}{m}\right) x_0' = \left(\frac{1}{m} - m\right) \cdot x_0 + 2 \cdot (y_0 - b) \Leftrightarrow$$

$$(m^2 + 1) \cdot x_0' = (1 - m^2) \cdot x_0 + 2 \cdot m \cdot (y_0 - b) \Leftrightarrow$$

$$x_0' = \frac{1 - m^2}{1 + m^2} \cdot x_0 + \frac{2 \cdot m}{1 + m^2} \cdot y_0 - \frac{2 \cdot b \cdot m}{1 + m^2}$$

Das zugehörige  $y_0'$  ermittelt man, indem man dieses Ergebnis in (1) einsetzt:

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.



# Fit in Mathe

Musterlösung

September

Klassenstufe 10

$$\begin{aligned}y_0' &= m \cdot \left( \frac{1-m^2}{1+m^2} \cdot x_0 + \frac{2 \cdot m}{1+m^2} \cdot y_0 - \frac{2 \cdot m \cdot b}{1+m^2} \right) + 2 \cdot b - y_0 + m \cdot x_0 \Leftrightarrow \\&= \frac{m \cdot (1-m^2) \cdot x_0 + 2 \cdot m^2 \cdot y_0 - 2 \cdot m^2 \cdot b}{1+m^2} + \frac{(2 \cdot b - y_0 + m \cdot x_0) \cdot (1+m^2)}{1+m^2} \Leftrightarrow \\&= \frac{m \cdot x_0 - m^3 \cdot x_0 + 2 \cdot m^2 \cdot y_0 - 2 \cdot m^2 \cdot b + 2 \cdot b - y_0 + m \cdot x_0 + 2 \cdot m^2 \cdot b - m^2 \cdot y_0 + m^3 \cdot x_0}{1+m^2} \Leftrightarrow \\&= \frac{2 \cdot m}{1+m^2} \cdot x_0 + \frac{m^2-1}{1+m^2} \cdot y_0 + \frac{2 \cdot b}{1+m^2}\end{aligned}$$

Der Bildpunkt zu  $P_0(x_0/y_0)$  hat also die Koordinaten

$$P_0' \left( \frac{1-m^2}{1+m^2} \cdot x_0 + \frac{2 \cdot m}{1+m^2} \cdot y_0 - \frac{2 \cdot b \cdot m}{1+m^2} \mid \frac{2 \cdot m}{1+m^2} \cdot x_0 - \frac{1-m^2}{1+m^2} \cdot y_0 + \frac{2 \cdot b}{1+m^2} \right)$$

Wenn  $m=0$  ist, handelt es sich bei der Spiegelgeraden um eine Parallele zur x-Achse. Die Herleitung ist nicht in gleicher Weise möglich, weil  $\frac{1}{m}$  nicht definiert ist, aber obige Formel ergibt auch in diesem Fall richtig für den Bildpunkt

$$P_0'(x_0 \mid 2b - y_0)$$

Wenn die Spiegelachse eine Parallele zur y-Achse ist, kann die Formel nicht angewendet werden, weil bei der Spiegelachse kein funktionaler Zusammenhang mehr zwischen x- und y-Koordinate gegeben ist, der hier vorausgesetzt war.

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.