Thema **Exponentialfunktion**

❶ Betrachte die Exponentialfunktion $f(x) = 16^x$ und fülle für sie folgende Wertetabelle aus:

Lösung

x	$-\frac{2}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{8}{4}$
$f(x)$	0,25	0,5	1	2	4	8	16	32	64	128	256

Die Summe aller Werte auf ganze Zahlen aufgerundet ergibt 512, also Buchstabenpaar BE.

❷ Gegeben ist die Funktion $f(x)$ wie in Aufgabe 1. Bestimme die Durchschnittssteigung $s(x)$ zwischen einem Punkt $(x/f(x))$ und dem Nachbarpunkt $(x+\frac{1}{4}/f(x+\frac{1}{4}))$.

Lösung

Die Steigung ist $\frac{f(x+\frac{1}{4})-f(x)}{(x+\frac{1}{4})-x} = \frac{16^{x+\frac{1}{4}}-16^x}{\frac{1}{4}} = 4\cdot 16^x\cdot(2-1) = 4\cdot 16^x$

Stelle hierfür eine Wertetabelle wie in Aufgabe 1 auf

x	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{2}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{7}{4}$
$s(x)$	0,5	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512

Die Summe aller Werte auf ganze Zahlen aufgerundet ergibt 1024 , also Buchstabenpaar SE

❸ Exponentialfunktionen $Q(t) = Q_0 a^t$ sind geeignet, Wachstumsvorgänge einer Größe Q als Funktion der Zeit zu beschreiben (die Zeit ist dann die Unabhängige und wird üblicherweise mit t benannt) ,.

Beweise folgende Aussagen:

a) Zu Beginn hat die Größe Q den Wert Q_0 .

b) Nach **einer** Zeiteinheit vergrößert (oder verkleinert) sich die Größe $Q(t)$ um das a-fache.

c) Zu jedem Zeitpunkt t ist die Veränderung von $Q(t)$ in einem sich anschließenden festen Zeitintervall Δt proportional zu $Q(t)$.

d) Die prozentuale Vergrößerung (oder Verkleinerung) um einen vorgegebenen Prozentsatz p ist nicht vom Beobachtungszeitpunkt sondern nur vom Beobachtungsintervall Δt abhängig.

Lösung

zu a) Der Anfangswert zum Zeitpunkt $t=0$ ist $Q(0)=Q_0 \cdot a^0 = Q_0$.

zu b) Es ist $Q(t+1)=Q_0 \cdot a^{t+1} = a \cdot Q_0 a^t = a \cdot Q(t)$.

zu c) Die Veränderung $\Delta Q(t)$ ist $Q(t+\Delta t)-Q(t)$ und das ist

$Q_0 \cdot a^{t+\Delta t}-Q_0 \cdot a^t = Q_0 \cdot a^t \cdot (a^{\Delta t}-1) = Q(t) \cdot (a^{\Delta t}-1)$, also $\Delta Q(t)=Q(t) \cdot (a^{\Delta t}-1)$,

d.h. die Proportionalitätskonstante ist $(a^{\Delta t}-1)$.

zu d) Die prozentuale Veränderung ist $\dfrac{\Delta Q(t)}{Q(t)}$ und das ist nach c)

$\dfrac{Q(t) \cdot (a^{\Delta t}-1)}{Q(t)} = a^{\Delta t}-1$, also nur von Δt abhängig.

Die Proportionalitätskonstante bei c) für $a=16$ und $\Delta t=\frac{1}{2}$ ist 3, also Buchstabenpaar NS.

❹ Der Logarithmus ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion.
Löse folgende Gleichungen:

1) $256 = 2^x$ 2) $\log_2(1024)=x$ 3) $10^{\log_{10}(100)}=x$ 4) $\log_{10}(x)=2$

Lösung

zu 1) $x=8$ zu 2) $x=10$ zu 3) $x=100$ zu 4) $x=100$

Die Summe der x-Werte ist 218, also Buchstabenpaar CH.

❺ Zum Jahreswechsel 2012/2013 lebten etwa 7,112 Mrd. Menschen auf der Erde. Man rechnet mit einem durchschnittlichen Zuwachs von 1,1% pro Jahr.

a) Wie sieht die Wachstumsfunktion $N(t)=N_0 a^t$ aus ?

b) Wie groß wird die Weltbevölkerung nach dieser Prognose Ende 2015 sein ?

Lösung

zu a) Nach Aufgabe 3 d) ist $a-1 = \dfrac{1,1}{100}$ oder $a = 1{,}011$ und nach Aufgabe 3 a)

$N_0 = 7{,}112$, also $N(t)=7{,}112 \cdot 1{,}011^t$.

zu b) Ende 2015 ist drei Jahre später als der Beginn des Betrachtungszeitraums, also $N(3)=7{,}112 \cdot 1{,}011^3 = 7{,}349$.

Die Differenz zwischen 7,349 und 7,112 ist 0,237, also leben dann ganzzahlig gerundet 237 Millionen Menschen mehr auf der Erde, d.h. Buchstabenpaar RA.

❻ Radioaktive Stoffe zerfallen verschieden schnell. Bei der Zerfallsgeschwindigkeit spricht man von der Halbwertszeit, das ist die Zeit, in der die Hälfte einer bestimmten Anzahl von radioaktiven Atomen zerfallen ist. Angenommen ein bestimmtes radioaktives Isotop hätte eine Halbwertszeit von einem halben Jahr.

a) Bestimme das a in der Zerfallsfunktion $n(t) = n_0 a^t$.

b) Nach wie viel Jahren (ganzzahlig!) gibt es erstmalig weniger als 1 % der Atome?

<u>Lösung</u>

zu a) Aus dem Ansatz $n(0{,}5) = \frac{n_0}{2} = n_0 \cdot a^{0{,}5}$ ergibt sich $\frac{1}{2} = a^{0{,}5} \Rightarrow a = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

Zu b) Es ist die Ungleichung $0{,}01 \cdot n_0 > n_0 \cdot (\frac{1}{4})^t$ nach t aufzulösen, d.h. $\frac{1}{100} > (\frac{1}{4})^t$ oder $4^t > 100$. Das ist ganzzahlig nach $t = 4$ Jahren der Fall.

Wegen $n(-2) = n_0 \cdot (\frac{1}{4})^{-2} = 4^2 \cdot n_0 = 16 \cdot n_0$ *gab es zwei Jahre vor dem Zeitpunkt* $t = 0$ *noch die 16-fache Menge, daher Buchstabenpaar NK.*

Lösungen mit Kennsilben

512	4	1023	3	218	768	16	251	1024	8	237	217
BE	HE	EC	NS	CH	BU	NK	EG	SE	AL	RA	RR

Lösungswort: BESENSCHRANK

❼ <u>Expertenaufgabe</u>

Wie oben gesagt, ist exponentielles Wachstum einer zeitabhängigen Größe $f(t)$ dadurch gekennzeichnet, dass ihre Veränderung proportional zu ihrer Größe ist, d.h. $f'(t) = k \cdot f(t)$.

Logistisches Wachstum nennt man ein Wachstum, das sich einer Wachstumsgrenze, der Sättigungsgrenze S , nähert. Die Änderung ist zusätzlich dadurch gekennzeichnet, dass sie proportional zum Abstand zur Sättigungsgrenze ist, d.h.

(1) $f'(t) = k \cdot f(t) \cdot (S - f(t))$

also (2) $f(0) = f_0$ und (3) $\lim\limits_{t \to \infty} f(t) = S$.

a) Setze eine Funktion $f(t) = \frac{c}{1 + a e^{-bt}}$ als Lösung von (1) an und bestimme a, b, c so, dass die Gleichungen (1), (2) und (3) erfüllt sind.

b) Skizziere den Graphen dieser Funktion.

c) Bestimme das t , bei dem die größte Wachstumsgeschwindigkeit erreicht wird und gib den Funktionswert an, bei dem das der Fall ist.

Lösung

zu a)

Die Ableitung von $f(t)$ ist unter Nutzung der Kettenregel

(*) $f'(t) = \dfrac{-c}{(1+a\cdot e^{-bt})^2}\cdot(-abe^{-bt}) = \dfrac{abce^{-bt}}{(1+ae^{-bt})^2}$

Damit wird aus Gleichung (1):

$$\frac{abce^{-bt}}{(1+ae^{-bt})^2} = \frac{k\cdot c}{1+ae^{-bt}}\cdot\left(S-\frac{c}{1+ae^{-bt}}\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{abce^{-bt}}{(1+ae^{-bt})^2} = \frac{k\cdot c\cdot S\cdot(1+ae^{-bt})-k\cdot c^2}{(1+ae^{-bt})^2}, \Leftrightarrow$$

$$abce^{-bt} = kc(S-c)+kcSae^{-bt}$$

Diese Gleichung kann nur gelten, wenn $c=S$ ist und $abS = akS^2 \Leftrightarrow b = kS$.

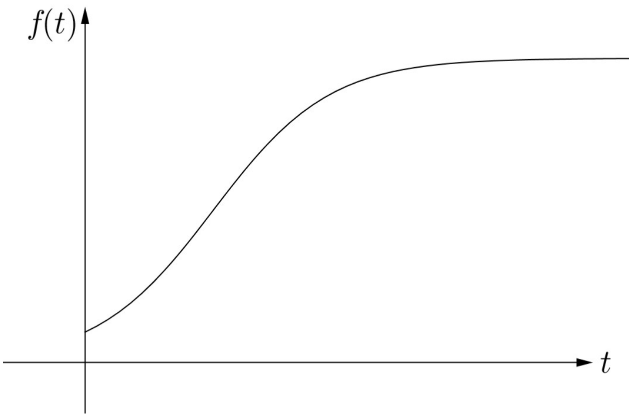
Dies in den Funktionsansatz eingesetzt, erhält man:

$f(t) = \dfrac{S}{1+ae^{-kSt}}$. Da $f(0) = f_0 = \dfrac{S}{1+ae^{-k\cdot S\cdot 0}} = \dfrac{S}{1+a}$ ergibt sich $a = \dfrac{S-f_0}{f_0}$

und damit $f(t) = \dfrac{S}{1+\dfrac{S-f_0}{f_0}\cdot e^{-kSt}} = \dfrac{S\cdot f_0}{f_0+(S-f_0)\cdot e^{-k\cdot S\cdot t}}$.

Man sieht, dass wie gefordert $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{S\cdot f_0}{f_0+(S-f_0)\cdot e^{-k\cdot S\cdot t}} = S$, da $e^{-k\cdot S\cdot t}$ für $t\to\infty$ gegen 0 geht.

Zu b)



zu c)

Aus (*) ergibt sich $f''(t) = a \cdot b^2 \cdot c \cdot e^{-b \cdot t} \cdot \frac{a \cdot e^{-bt} - 1}{(1 + a \cdot e^{-bt})^3}$.

Die zweite Ableitung hat eine Nullstelle bei $a \cdot e^{-b \cdot t_0} - 1 = 0$ oder $t_0 = \frac{\ln(a)}{b}$ bzw mit obigen Ersetzungen: $t_0 = \frac{\ln(S - f_0) - \ln(f_0)}{k\,S}$.

Wenn a und b positiv sind, wechselt $a\,e^{-bt} - 1$ das Vorzeichen an der Nullstelle von „+“ nach „-“, d.h. $f'(t_0)$ hat bei t_0 ein lokales Maximum, was bedeutet, dass hier die Steigung am größten ist.