Fit in Mathe

Musterlösung

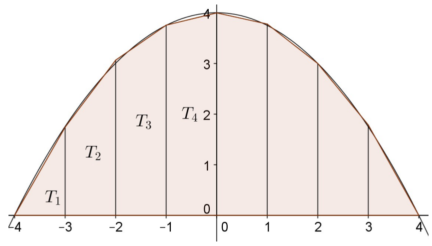
September 2013 Klassenstufe 12

Thema	**Integration**

❶ Gegeben ist die Funktion $f(x) = -\frac{x^2}{4} + 4$ mit Nullstellen bei $x_1 = -4$ und $x_2 = 4$.

Gesucht ist die Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse.

Berechne einen Näherungswert durch 8 einbeschriebene Trapeze. Aus Symmetriegründen reicht es, eine Hälfte zu betrachten und diese zu verdoppeln.



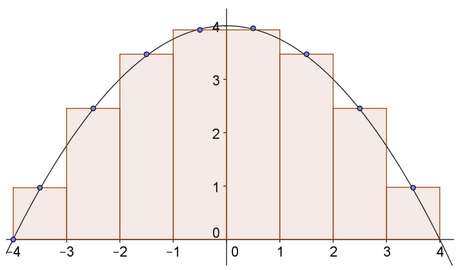
Der Näherungswert ist 21.

<u>*Lösung*</u>

x	0	1	2	3
$f(x)$	4	$\frac{15}{4}$	3	$\frac{7}{4}$
Trapez	$\frac{31}{8}$	$\frac{27}{8}$	$\frac{19}{8}$	$\frac{7}{8}$

Die Summe der Trapeze ist 10,5. Da dies nur eine Hälfte ist, ist die gesamte Fläche 21, also Buchstabenpaar GE.

❷ Der Flächeninhalt wie in Aufg.1 – wieder kann man sich aus Symmetriegründen auf eine Hälfte beschränken – soll durch eine andere Näherung berechnet werden.



Teile die halbe Grundseite (Länge 4) in n gleiche Intervalle. Dann hat jedes die Breite $\frac{4}{n}$. Die Mitte des k-ten Intervalls ist $x_k = -4 + \frac{4}{n}(k - \frac{1}{2})$ mit

$(k = 1, \ldots, n)$ und das k-te Rechteck hat die Fläche $F_k^{(n)} = \frac{4}{n} f(x_k)$.

Bilde die Summe $F^{(n)} = F_1^{(n)} + \ldots + F_n^{(n)}$.

Durch Anwendung der Formeln

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{und} \quad 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

lässt sich der Term für $F^{(n)}$ vereinfachen. Ermittle den Grenzwert, gegen den $F^{(n)}$ für $n \to \infty$ strebt.

Lösung

Es ist

$$F_k^{(n)} = \frac{4}{n} f(x_k) = \frac{4}{n} \cdot (-\frac{(-4+\frac{4}{n}(k-\frac{1}{2}))^2}{4} + 4) \Leftrightarrow$$

$$= -\frac{16 - \frac{32}{n}\cdot(k-\frac{1}{2}) + \frac{16}{n^2}\cdot(k-\frac{1}{2})^2}{n} + \frac{16}{n} \Leftrightarrow$$

$$= -\frac{16}{n} + \frac{32}{n^2}\cdot(k-\frac{1}{2}) - \frac{16}{n^3}\cdot(k-\frac{1}{2})^2 + \frac{16}{n} \Leftrightarrow$$

$$= \frac{32}{n^2}\cdot(k-\frac{1}{2}) - \frac{16}{n^3}\cdot(k^2-k+\frac{1}{4}) \Leftrightarrow$$

$$= -\frac{16}{n^3}\cdot k^2 + (\frac{32}{n^2}+\frac{16}{n^3})\cdot k - (\frac{4}{n^3}+\frac{16}{n^2}) \Leftrightarrow$$

$$= -\frac{16}{n^3}\cdot k^2 + \frac{16}{n^2}\cdot(2+\frac{1}{n})\cdot k - \frac{4}{n^2}\cdot(\frac{1}{n}+4)$$

Nun summieren wir über den Summationsindex k von 1 bis n , d.h.

$$\sum_{k=1}^{n} (-\frac{16}{n^3}\cdot k^2 + \frac{16}{n^2}\cdot(2+\frac{1}{n})\cdot k - \frac{4}{n^2}\cdot(\frac{1}{n}+4)) \Leftrightarrow$$

$$= -\frac{16}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{16}{n^2}\cdot(2+\frac{1}{n})\sum_{k=1}^{n} k - \frac{4}{n^2}\cdot(\frac{1}{n}+4)\sum_{k=1}^{n} 1 \Leftrightarrow$$

$$= -\frac{16}{n^3}\cdot\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6} + \frac{16}{n^2}\cdot(2+\frac{1}{n})\frac{n\cdot(n+1)}{2} - \frac{4}{n^2}\cdot(\frac{1}{n}+4)\cdot n \Leftrightarrow$$

$$= -\frac{8}{n^2}\cdot\frac{(n+1)\cdot(2n+1)}{3} + \frac{8}{n}\cdot(2+\frac{1}{n})\cdot(n+1) - \frac{4}{n}\cdot(\frac{1}{n}+4) \Leftrightarrow$$

$$= -\frac{8}{3}\cdot(1+\frac{1}{n})\cdot(2+\frac{1}{n}) + 8(2+\frac{1}{n})\cdot(1+\frac{1}{n}) - \frac{4}{n^2} - \frac{16}{n}$$

Im Grenzwert geht $\frac{1}{n}$ gegen 0, so dass der gesamte Ausdruck gegen $-\frac{8}{3}\cdot 2 + 8\cdot 2 = \frac{32}{3}$ geht. Dies ist nur eine Hälfte der Fläche, also ist die gesamt Fläche $\frac{64}{3} = 21\frac{1}{3}$, was schon relativ gut mit der Näherung aus Aufgabe 1 übereinstimmt.

Die gesamte Fläche ist 64 Drittel groß, also Buchstabenpaar SC.

❸ Es gilt $\int x^{\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ für alle $\alpha \in R\setminus\{-1\}$.

a) Berechne das Integral $\int_{-2}^{2}(x^4-5x^2+4)\,dx$.

b) Berechne die Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen der Funktion $f(x) = x^4-5x^2+4$

Lösung

zu a)

Eine Stammfunktion der Integrandenfunktion ist $F(x) = \frac{1}{5}x^5-\frac{5}{3}x^3+4x$.

Dann ist das obige bestimmte Integral:

$$F(2)-F(-2) = \frac{1}{5}\cdot 32-\frac{5}{3}\cdot 8+8-(\frac{1}{5}\cdot(-32)-\frac{5}{3}(-8)-8) = \frac{32}{5}-\frac{40}{3}+8+\frac{32}{5}-\frac{40}{3}+8 = \frac{32}{15}$$

zu b)

Die Integrandenfunktion hat Nullstellen bei $x_1=-2$, $x_2=-1$, $x_3=1$, $x_4=2$

Also ist die Fläche F, die zwischen den Nullstellen eingeschlossen wird:

$$F = |F(-1)-F(-2)|+|F(1)-F(-1)|+|F(2)-F(1)| \Leftrightarrow$$

$$= |-\frac{1}{5}+\frac{5}{3}-4-(-\frac{32}{5}+\frac{40}{3}-8)|+|\frac{1}{5}-\frac{5}{3}+4-(-\frac{1}{5}+\frac{5}{3}-4)|+|\frac{32}{5}-\frac{40}{3}+8-(\frac{1}{5}-\frac{5}{3}+4)| \Leftrightarrow$$

$$= |\frac{31}{5}-\frac{35}{3}+4|+|\frac{2}{5}-\frac{10}{3}+8|+|\frac{31}{5}-\frac{35}{3}+4| = \frac{22}{15}+\frac{76}{15}+\frac{22}{15} = \frac{120}{15} = 8$$

Die Differenz der Werte ist 88 Fünfzehntel, also Buchstabenpaar HI.

❹ Der Hauptsatz der Integralrechnung sagt:

Ist f eine stetige Funktion, so ist $F(x) := \int_{a}^{x} f(t)\,dt$ eine differenzierbare Funktion und eine *Stammfunktion* zu f , d.h. $F'(x)=f(x)$.

Bestimme die Stammfunktionen mit additiver Konstante 0 zu $f(x)=$

1) $\frac{3}{2}x^2$ 2) $\frac{1}{\sqrt{x}}$ 3) $e^{x-1}(e = Eulersche\,Zahl)$ 4) $\ln(10)\cdot 10^x$ 5) $\frac{1}{(x+1)^2}$ 6) $\frac{10}{x}$

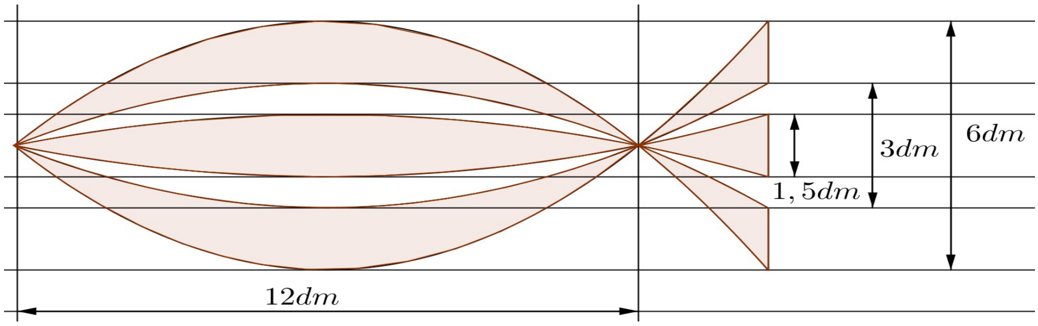
Lösung

zu 1) $F(x)=\frac{1}{2}x^3$ zu 2) $F(x) = 2\cdot x^{\frac{1}{2}}$ zu 3) $F(x) = e^{x-1}$ zu 4) $F(x) = 10^x$

zu 5) $F(x) = -\frac{1}{x+1}$ zu 6) $F(x) = 10\cdot\ln(x)$

Die Summe der Werte F(1) von allen gesuchten Stammfunktionen ist 13, also Buchstabenpaar CH.

❺ Die Schmuckform unten soll mit Blattgold ausgelegt werden. Die Begrenzungslinien sind Parabeln. $1\,cm^2$ kostet 9 €. Ermittle die Kosten der gesamten Arbeit.



Lösung

Wenn wir das Koordinatensystem in die Mitte des Fischkörpers legen, so werden die Begrenzungslinien von oben nach unten durch folgende Funktionen beschrieben, daneben stehen jeweils die zugehörigen Stammfunktionen

1. $f_1(x) = -\frac{1}{12}\cdot(x^2-36) \quad x\in[-6,6\sqrt{2}] \quad (F_1(x) = -\frac{1}{36}x^3+3x)$
2. $f_2(x) = -\frac{1}{24}\cdot(x^2-36) \quad x\in[-6,6\sqrt{2}] \quad (F_2(x) = -\frac{1}{72}x^3+\frac{3}{2}x)$
3. $f_3(x) = -\frac{1}{48}\cdot(x^2-36) \quad x\in[-6,6\sqrt{2}] \quad (F_3(x) = -\frac{1}{144}x^3+\frac{3}{4}x)$
4. $f_4(x) = \frac{1}{48}\cdot(x^2-36) \quad x\in[-6,6\sqrt{2}] \quad (F_4(x) = \frac{1}{144}x^3-\frac{3}{4}x)$
5. $f_5(x) = \frac{1}{24}\cdot(x^2-36) \quad x\in[-6,6\sqrt{2}] \quad (F_5(x) = \frac{1}{72}x^3-\frac{3}{2}x)$
6. $f_6(x) = \frac{1}{12}\cdot(x^2-36) \quad x\in[-6,6\sqrt{2}] \quad (F_6(x) = \frac{1}{36}x^3-3x)$

Die Stammfunktionen an folgenden Stellen ausgewertet ergibt:

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6
-6	-12	-6	-3	3	6	12
6	12	6	3	-3	-6	-12
$6\sqrt{2}$	$6\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$\frac{3}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{3}{2}\sqrt{2}$	$-3\sqrt{2}$	$-6\sqrt{2}$

Die Flächen setzen sich zusammen aus

1. $(F_1(6)-F_2(6))-(F_1(-6)-F_2(-6)) = 12-6-(-12+6) = 12$
2. $(F_3(6)-F_4(6))-(F_3(-6)-F_4(-6)) = 3-(-3)-(-3-3) = 12$
3. $(F_5(6)-F_6(6))-(F_5(-6)-F_6(-6)) = -6-(-12)-(6-12) = 12$

4. $(F_6(6\sqrt{2})-F_5(6\sqrt{2}))-(F_6(6)-F_5(6)) = -6\sqrt{2}+3\sqrt{2}-(-12+6) = 6-3\sqrt{2}$
5. $(F_4(6\sqrt{2})-F_3(6\sqrt{2}))-(F_4(6)-F_3(6)) = -1{,}5\sqrt{2}-1.5\sqrt{2}-(-3-3) = 6-3\sqrt{2}$
6. $(F_2(6\sqrt{2})-F_1(6\sqrt{2}))-(F_2(6)-F_1(6)) = 3\sqrt{2}-6\sqrt{2}-(6-12) = 6-3\sqrt{2}$

Die Summe aller Flächenanteile ist $36+18-8\sqrt{2} = 54-9\sqrt{2}\ dm^2 \approx 4127{,}2\,cm^2$

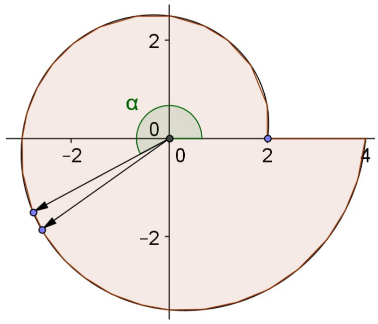
Dann sind die Kosten $(5400-900\sqrt{2})\,cm^2 \cdot 0{,}009\dfrac{T€}{cm^2} \approx 37{,}14\,T€$.

Der Wert der Arbeit auf glatte T€ gerundet ist 37, also das Buchstabenpaar TE.

Lösungen mit Kennsilben														
21 GE	37 TE	65 ON	35 IT	87 EH	20 ER	12 ZE	64 SC	14 LU	22 BR	88 HI	13 CH	36 NG	89 ZE	63 ZA
Lösungswort: GESCHICHTE														

❻ (Expertenaufgabe)

Die Randkurve neben stehender „Schneckenfläche“ genügt dem Bildungsgesetz, dass der Abstand r eines Punktes der Kurve vom Ursprung mit zunehmendem Winkel linear wächst, d.h. $r(\alpha) = 2(1+\frac{\alpha}{2\pi})$.



Ermittle die Fläche.

(Tipp: Die Gesamtfläche kann als die Summe von kleinen Kreissektoren zwischen den Winkeln α und $\alpha+\Delta\alpha$ angenähert werden. Hierfür kann man analog zur Einführung der Fläche unter einer Kurve eine Unter- und Obersumme bilden und einen Grenzwert für $\Delta\alpha\to 0$ finden.)

<u>Lösung</u>

Ein Flächenelement ΔF hat näherungsweise die Größe

$$\Delta F = \frac{1}{2}\cdot r(\alpha)\cdot r(\alpha)\cdot\Delta\alpha = \frac{4(1+\frac{\alpha}{2\pi})^2}{2}\cdot\Delta\alpha = 2(1+\frac{\alpha}{2\pi})^2\cdot\Delta\alpha$$

Damit ist die gesamte Fläche:

$F_{genähert} = \sum \Delta F = \sum 2\cdot(1+\frac{\alpha}{2\pi})^2\cdot\Delta\alpha$ und das heißt im Grenzwert

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0} 2\sum(1+\frac{\alpha}{2\pi})^2\cdot\Delta\alpha = 2\cdot\int_0^{2\pi}(1+\frac{\alpha}{2\pi})^2\cdot d\alpha = 2\cdot\int_0^{2\pi}(1+\frac{\alpha}{\pi}+\frac{\alpha^2}{4\pi^2})\,d\alpha = 2\cdot(2\pi+2\pi+\frac{2}{3}\pi)$$

Also ist $F=9\frac{1}{3}\pi$.